

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZC 18a

Avondcursus wiskunde 1950-1951;

Analyse, 1.

W. Peremans.



1951

1952

ZW

Avondcursus 1950-1951.

ANALYSE

door

Dr W. Peremans.

§1. Enkele begrippen uit de verzamelingsleer.

Een verzameling is de samenvatting van een aantal objecten tot een geheel. De objecten heten de elementen van de verzameling. a is een element van V schrijven we $a \in V$. Nu betekent $a = b$, dat a en b verschillende aanduidingen zijn van hetzelfde element. Op logische gronden geldt dan:

$a = a$ (reflexieve eigenschap)

uit $a = b$ volgt $b = a$ (symmetrische eigenschap)

uit $a = b$ en $b = c$ volgt $a = c$ (transitieve eigenschap).

Een verzameling, waar geen enkel element toe behoort, heet een lege verzameling.

Een verzameling V heet een deelverzameling van een verzameling W (geschreven: $V \subset W$), als ieder element van V ook tot W behoort (als uit $a \in V$ volgt $a \in W$). Als er bovendien in W een element is, dat niet tot V behoort (er is een a met $a \in W$, $a \notin V$), dan heet V een echte deelverzameling van W . Een lege verzameling is deelverzameling van iedere verzameling.

De vereniging $V \cup W$ (of ook $V + W$) van twee verzamelingen V en W is de verzameling van die elementen, die in V of in W (of in beide) liggen.

De doorsnede $V \cap W$ (of ook VW) van twee verzamelingen V en W is de verzameling van die elementen, die in V en in W liggen.

Als de doorsnede van twee verzamelingen leeg is, heten de verzamelingen disjunct.

Als $V \subset R$ dan bestaat het complement van V t.o.v. R (geschreven R/V of ook $R - V$) uit die elementen, die wel in R maar niet in V liggen. Er geldt dan: $V \cap (R/V)$ is leeg, $V \cup (R/V) = R$.

We spreken van een toevoeging of een afbeelding van een verzameling V in een verzameling V' als aan iedere $a \in V$ een $a' \in V'$ toegevoegd wordt ($a \rightarrow a'$). a' heet het beeld van a , a een origineel van a' . We schrijven de toevoeging ook wel: $a' = f(a)$ (f is een functie van a). Als ieder element van V' als beeld optreedt, spreken we van een afbeelding van V op V' . Als ieder element van V' hoogstens één origineel

heeft (anders gezegd: als uit $a \neq b$, $a \rightarrow a'$, $b \rightarrow b'$ volgt $a' \neq b'$), spreken we van een eeneenduidige afbeelding.

Een eeneenduidige afbeelding $a \rightarrow a'$ van V op V' kan omgekeerd worden ($a' \rightarrow a$) tot een eeneenduidige afbeelding van V' op V ; de laatste afbeelding heet de inverse van de eerste afbeelding.

Twee verzamelingen heten gelijkmachtig als er een eeneenduidige afbeelding van de ene op de andere bestaat. Een verzameling is gelijkmachtig met zichzelf (kies de identieke afbeelding $a \rightarrow a$); als V gelijkmachtig met W is dan is ook W gelijkmachtig met V (kies de inverse afbeelding); als V gelijkmachtig met W en W gelijkmachtig met U is, is V gelijkmachtig met U (als $a \in V$, $b \in W$, $c \in U$ is en $a \rightarrow b$ en $b \rightarrow c$, kies dan de samengestelde afbeelding $a \rightarrow c$). We zien dus, dat de gelijkmachtigheid aan de reflexieve, symmetrische en transitieve eigenschappen voldoet.

§ 2. Natuurlijke getallen.

De analyse berust op het getalbegrip. De verzameling N van de natuurlijke getallen kunnen we axiomatisch karakteriseren. Ieder natuurlijk getal a bezit een opvolger, die we voorlopig met a' aanduiden. We stellen nu de volgende axioma's van Peano op:

- 1° $1 \in N$
- 2° Er is een afbeelding $a \rightarrow a'$ van N in N , die aan ieder element een opvolger toevoegt.
- 3° Voor iedere $x \in N$ geldt $x' \neq 1$.
- 4° Uit $x \neq y$ volgt $x' \neq y'$ voor $x \in N$, $y \in N$.
- 5° Als $M \subset N$ en M de volgende eigenschappen heeft:

$$1 \in M,$$

$$\text{als } x \in M, \text{ dan ook } x' \in M,$$

dan is $M = N$.

Het eerste axioma zegt, dat N niet leeg is, het derde dat 1 niet als opvolger optreedt, het vierde, dat de afbeelding, die aan ieder element zijn opvolger toevoegt, eeneenduidig is. Het vijfde axioma heet ook axioma der volledige inductie. Op grond van dit axioma kan een eigenschap van natuurlijke getallen door volledige inductie bewezen worden:

(2.1) Als een eigenschap E van natuurlijke getallen geldig is voor 1 , en als uit de geldigheid van E voor een natuurlijk getal x de geldigheid voor x' volgt, dan geldt E voor alle natuurlijke getallen.

Bewijs: Stel M de verzameling natuurlijke getallen (d.w.z. de deelverzameling ^{verzameling} derv. natuurlijke getallen), waarvoor E geldt, dan is $1 \in M$ en als $x \in M$, dan ook $x' \in M$. Volgens 5° is dan $M = N$, dus E geldt voor alle natuurlijke getallen.

Met behulp van deze axioma's is nu de hele leer der getallen op te bouwen. Het is onmogelijk, dat hier in alle details uit te voeren, omdat dit ons veel te lang op zou houden. Wel zullen we echter de weg aangeven, waarlangs dit kan geschieden, zonder echter alle bewijzen te vermelden.

(2.2) Voor alle $x \in \mathbb{N}$ geldt $x' \neq x$.

Bewijs: $1' \neq 1$ (ax. 3^o). Als $x \neq x'$, dan is $x' \neq (x')'$ (ax. 4^o).

Dus $x' \neq x$ is met volledige inductie bewezen.

(2.3) Als $x \neq 1$, $x \in \mathbb{N}$ is, bestaat er een $u \in \mathbb{N}$, zodat $u' = x$ is (d.w.z. ieder natuurlijk getal behalve 1 is opvolger).

Bewijs: We bewijzen met volledige inductie de volgende eigenschap van een natuurlijk getal x : $x = 1$ of er is een $u \in \mathbb{N}$, zodat $u' = x$. Nu heeft 1 de eigenschap, en als x de eigenschap heeft, dan geldt voor $x = 1$ $1' = 1'$ ($u = 1$) en als $u' = x$, $(u')' = x'$.

We noemen een deelverzameling M van $\mathbb{N}$ een o-verzameling als uit $x \in M$ volgt $x' \in M$.

We definiëren nu voor twee natuurlijke getallen a en b , dat $a < b$, als iedere o-verzameling, die a' bevat ook b bevat. In plaats van $a < b$ schrijven we ook $b > a$. Het is a priori natuurlijk in het geheel niet uitgesloten, dat b.v. zowel $a < b$ als $b < a$ zou zijn. Er gelden echter de volgende eigenschappen (de kleine letters hierin stellen alle willekeurige natuurlijke getallen voor):

(2.4) $x < x'$.

(2.5) Uit $x < y$ en $y < z$ volgt $x < z$.

(2.6) Tussen x en y gelden minstens één van de relaties $x = y$, $x < y$, $y < x$.

(2.7) Uit $x = y$ volgt, dat niet $x < y$ is (d.w.z. niet $x < x$).

(2.8) Uit $x < y$ volgt, dat niet $y < x$ is.

We kunnen (2.6), (2.7) en (2.8) ook als volgt samenvatten: tussen x en y geldt één en slechts één van de relaties $x = y$, $x < y$, $y < x$.

Opgave 1. Bewijs (2.4) (met volledige inductie).

Opgave 2. Bewijs (2.5) (rechtstreeks uit de definitie van $<$).

In plaats van $x < y$ of $x = y$ (d.w.z. niet $y < x$) schrijven we ook $x \leq y$. Analoo $x \geq y$.

(2.9) $1 \leq x$

(2.10) Als $x < y$ is, dan is $x' \leq y$ en omgekeerd.

(2.11) Als $x \leq y$ is, dan is $x < y'$ en omgekeerd.

Deze stellingen komen bij het bewijs van (2.6) vanzelf voor de dag.

(2.12) Iedere niet-lege verzameling V van natuurlijke getallen bezit één en slechts één kleinste element. (d.w.z. een element $a \in V$, zodat voor alle $x \in V$ geldt $a \leq x$).

Bewijs: We bewijzen eerst dat er een is. Neem de verzameling M van die natuurlijke getallen y , zodat voor alle $x \in V$ geldt $y \leq x$. Dan is $1 \in M$ (2.9); er moet dan een $a \in M$ bestaan, zodat $a' \notin M$. Immers als voor alle $a \in M$ gold $a' \in M$, dan was (5^0) $M = N$, maar omdat V niet leeg is is er een $b \in V$, maar $b' > b$ (2.4), dus $b' \notin M$, hetgeen een tegenspraak geeft. Nu is a het gezochte kleinste element. Immers $a \leq x$ voor alle $x \in V$, omdat $a \in M$; als $a \notin V$ was, was zelfs $a < x$ voor alle $x \in V$, dus $a' \leq x$ voor alle $x \in V$ (2.10), dus $a' \in M$, hetgeen een tegenspraak geeft. Dus a is een kleinste element van V .

Als a en $\bar{a}$ beide kleinste elementen van V waren, was $a \leq \bar{a}$ en $\bar{a} \leq a$, dus $a = \bar{a}$ (door de eerste betrekking is $a > \bar{a}$ en door de tweede $a < \bar{a}$ uitgesloten). Dus er is maar één kleinste element.

(2.13) (Algemeen bewijs met volledige inductie). Als een eigenschap van natuurlijke getallen geldt voor x als zij geldt voor alle $y < x$, dan geldt deze eigenschap voor alle natuurlijke getallen (deze stelling omvat (2.1) als bijzonder geval).

Opgave 3. Bewijs dit door (2.12) toe te passen op de verzameling, waarvoor de eigenschap niet geldt.

Naast het bewijs met volledige inductie kennen we ook de definitie (of constructie) door volledige inductie. We willen een afbeelding $\varphi(x)$ van de verzameling der natuurlijke getallen in een willekeurige andere verzameling definiëren. Stel dat we beschikken over een constructievoorschrift (A), dat voor iedere $x \in N$ $\varphi(x)$ ondubbelzinnig bepaalt, zodra $\varphi(y)$ bepaald is voor alle $y < x$ ($y \in N$).

(2.14) Als er een constructieprincipe van het bovenstaande type (A) gegeven is, is er één en slechts één afbeelding $\varphi(x)$, die eraan voldoet.

Het vrij ingewikkelde bewijs hiervan laten we achterwege.

Een belangrijk speciaal geval van een constructieprincipe van het type (A) is, dat $\varphi(1)$ bepaald is en dat $\varphi(x')$ bepaald is, zodra $\varphi(x)$ bepaald is.

Een verzameling V van natuurlijke getallen heet begrensd als er een $a \in N$ bestaat, zodat voor alle $x \in V$ geldt $x \leq a$.

(2.15) Een niet-lege begrensde verzameling V natuurlijke getallen heeft een grootste element (d.w.z. een $v \in V$, zodat voor alle $x \in V$ geldt $x \leq v$).

Opgave 4. Bewijs dit door (2.12) toe te passen op de verzameling van die natuurlijke getallen, die $\geq$ alle elementen van V zijn.

(2.16) Een niet-lege verzameling V natuurlijke getallen met een grootste element is begrensd.

Dit is duidelijk.

We noemen de verzameling van de natuurlijke getallen die $\leq$ een vast natuurlijk getal n zijn het beginstuk $[1, n]$.

We noemen een willekeurige verzameling eindig als zij leeg is of gelijkmachting met een beginstuk.

(2.17) Een begrensde verzameling natuurlijke getallen is eindig; als ze niet leeg is (grootste element v), is er een afbeelding op een beginstuk $[1, n]$, zodat $n \leq v$.

(2.18) Een eindige verzameling natuurlijke getallen is begrensd.

Beide stellingen worden met volledige inductie bewezen.

(2.19) N is niet begrensd, dus niet eindig.

Dit volgt uit (2.4) en (2.18).

Een willekeurige verzameling die gelijkmachting is met N heet aftelbaar oneindig. Een verzameling, die eindig of aftelbaar oneindig is, heet aftelbaar.

(2.20) Als $[1, n]$ gelijkmachting is met $[1, m]$, dan is $n = m$.

Dit wordt met volledige inductie bewezen.

Uit (2.20) volgt, dat een niet-lege eindige verzameling met niet meer dan één beginstuk $[1, n]$ gelijkmachting kan zijn; deze n noemen we het aantal elementen van de verzameling.

(2.21) Een deelverzameling W van een eindige verzameling V is eindig; het aantal elementen m van W is $\leq$ het aantal elementen n van V ; als W een echte deelverzameling van V is, is zelfs $m < n$.

Dit wordt bewezen door van (2.17) gebruik te maken. Voor het laatste gedeelte van de stelling meet de eeneenduidige afbeelding eventueel nog wat veranderd worden.

(2.22) (Hoofdstelling over eindige verzamelingen). Een eindige verzameling is nooit gelijkmachting met een echte deelverzameling.

Dit volgt nu direct uit (2.21) en (2.20).

(2.23) Een deelverzameling van een aftelbare verzameling is aftelbaar.

We bewijzen dit niet.

We kunnen de elementen van een aftelbare verzameling V nummeren; d.w.z. we schrijven de afbeelding van een beginstuk of van N op V als een functie $a(k)$. Meestal schrijven we het natuurlijke getal k dan als index: a_k .

We kunnen ook verzamelingen (collecties) van verzamelingen beschouwen. De vereniging van een collectie verzamelingen bestaat uit die elementen, die tot minstens één der verzamelingen van de collectie behoren, de doorsnede uit die elementen, die tot alle verzamelingen der collectie behoren.

(2.24) De vereniging van een aftelbare collectie aftelbare verzamelingen is aftelbaar.

Het bewijs verloopt volgens het volgende schema: geef ieder element een dubbele index: a_{ij} . De eerste geeft het nummer van de verzameling waartoe het behoort, het tweede het nummer van het element in de verzameling.

$$\begin{array}{lcl} V_1 : & a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots \\ V_2 : & a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots \\ V_3 : & a_{31}, a_{32}, a_{33}, \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

We tellen nu af volgens de pijlen.

We definiëren nu voor ieder paar x, y natuurlijke getallen door volledige inductie een som $x + y$ met behulp van de volgende betrekkingen:

$$\left. \begin{array}{l} x + 1 = x' \\ x + y' = (x+y)' \end{array} \right\}$$

Dit is voor iedere vaste x inderdaad een definitie voor y door volledige inductie.

$$(2.25) \quad x + (y+z) = (x+y) + z \quad (\text{associatieve eigenschap})$$

$$(2.26) \quad x + y = y + x \quad (\text{commutatieve eigenschap})$$

$$(2.27) \quad x < x + y$$

$$(2.28) \quad \text{Uit } x + y = x + z \text{ volgt } y = z$$

$$(2.29) \quad \text{Uit } x < y \text{ volgt } x + z < y + z \text{ en omgekeerd (monotonie-eigenschap)}.$$

Als voorbeeld bewijzen we (2.25). Voor vaste x en y nemen we de verzameling M van die z , waarvoor (2.25) geldt.

$$(x+y) + 1 = (x+y)' = x + y' = x + (y+1), \text{ dus } 1 \in M.$$

Stel dat $z \in M$, dus $(x+y) + z = x + (y+z)$, dan is

$$(x+y) + z' = [(x+y) + z]' = [x + (y+z)]' = x + (y+z)' = x + (y+z'), \text{ dus } z' \in M.$$

Dus $M = N$ en (2.25) geldt algemeen.

Opgave 5. Bewijs (2.26).

Opgave 6. Bewijs (2.27).

Opgave 7. Bewijs (2.28).

Opgave 8. Bewijs (2.29).

Op grond van (2.25) mogen we $x + y + z$ zonder haakjes schrijven. Voor vaste a en b behoeft er geen x te bestaan zodat $a + x = b$ is (b.v. is $1 + x > 1$ (2.27), dus $1 + x \neq 1$). Als er echter zo'n x bestaat, dan is er ook niet meer dan één, want $a + x = b$ en $a + y = b$ geeft $a + x = a + y$, dus $x = y$ (2.28). We noemen de oplossing dan het verschil $b - a$. (2.30) Uit $x < y$ volgt dat er een z bestaat, zodat $x + z = y$.

Bewijs. Neem de verzameling M van de getallen $x + u$ (x vast, u willekeurig). Dan is M een o-verzameling, want $(x+u)' = x + u'$, en $x' \in M$, want $x' = x + 1$. Dus is $y \in M$, dus er is een z waarvoor $x + z = y$.

(2.31) Voor de natuurlijke getallen a en b bestaat $b - a$ dan en slechts dan als $a < b$.

Dit volgt uit (2.30) en (2.27).

We schrijven voortaan voor de opvolger van a niet meer a' maar $a + 1$.

We definiëren voor ieder paar x, y natuurlijke getallen een product xy met behulp van de volgende betrekkingen:

$$\left. \begin{aligned} x \cdot 1 &= x \\ x(y+1) &= x \cdot y + x \end{aligned} \right\}$$

$$(2.32) \quad x \cdot y = y \cdot x$$

$$(2.33) \quad x(y+z) = x \cdot y + x \cdot z \quad (\text{distributieve eigenschap van de vermenigvuldiging t.o.v. de optelling})$$

$$(2.34) \quad (xy)z = x(yz)$$

$$(2.35) \quad \text{Uit } x \cdot z = y \cdot z \text{ volgt } x = y$$

$$(2.36) \quad \text{Uit } x < y \text{ volgt } x \cdot z < y \cdot z \text{ en omgekeerd.}$$

$$(2.37) \quad \text{Uit } x \neq 1 \text{ volgt } x \cdot y \neq 1.$$

Op geheel analoge wijze als bij de optelling kan men hier aantonen, dat $a \cdot x = b$ niet oplosbaar hoeft te zijn, maar dat er nooit meer dan één oplossing is. De oplossing, als zij bestaat, heet het quotiënt $\frac{b}{a}$.
Opgave 9. Veeer dit uit.

We zullen de theorie van het schrijven van natuurlijke getallen met cijfers niet behandelen, doch bekend veronderstellen.

§3. Gehele getallen.

We willen de verzameling der natuurlijke getallen zo uitbreiden, dat $a + x = b$ wel altijd oplosbaar is.

We definiëren de verzameling G der gehele getallen als de verzameling bestaande uit een element 0 (nul), en bij ieder natuurlijk getal a een element $+a$ en een element $-a$. Voorlopig duiden we willekeurige gehele getallen aan met Griekse en natuurlijke getallen met Latijnse letters.

We definiëren de som van twee gehele getallen als volgt:

$$\begin{aligned} 0 + \alpha &= \alpha + 0 = \alpha \\ (+a) + (+b) &= + (a+b) \\ (+a) + (-b) &= \begin{cases} + (a-b) & \text{als } a > b \\ 0 & \text{als } a = b \\ - (b-a) & \text{als } a < b \end{cases} \\ (-a) + (+b) &= (+b) + (-a) \quad (\text{vorige geval}) \\ (-a) + (-b) &= - (a+b). \end{aligned}$$

We wijzen daarbij op het volgende om verwarring te voorkomen. In $(+a) + (+b) = +(a+b)$ staan drie verschillende soorten $+$ tekens: het eerste, derde en vierde is het $+$ teken van de definitie van een geheel getal, het vijfde is de (bekende) optelling van natuurlijke getallen, het tweede is de nu gedefinieerde optelling van gehele getallen. Analoge opmerkingen gelden voor de andere betrekkingen.

$$(3.1) \quad \alpha + \beta = \beta + \alpha.$$

$$(3.2) \quad (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma).$$

$$(3.3) \quad \text{Uit } \alpha + \beta = \alpha + \gamma \text{ volgt } \beta = \gamma.$$

Dit wordt bewezen door gevalonderscheidingen te maken en de definitie van optelling toe te passen en eigenschappen van natuurlijke getallen te gebruiken. Dit is een vrij langdradig werk.

(3.4) Als α en β gegeven zijn, is er een ξ te vinden, zodat $\alpha + \xi = \beta$ is. Deze noemen we $\beta - \alpha$. Speciaal $0 - \alpha$ noemen we $-\alpha$.

Bewijs: Eerst bepalen we $-\alpha$. We weten

$$\begin{aligned} 0 + 0 &= 0 \\ (+a) + (-a) &= 0 \\ (-a) + (+a) &= 0 \end{aligned}$$

dus we kunnen definiëren

$$\begin{aligned} -\alpha &= 0 & \text{als } \alpha &= 0 \\ -\alpha &= -a & \text{" } \alpha &= +a \\ -\alpha &= +a & \text{" } \alpha &= -a, \end{aligned}$$

dan voldoet $-\alpha$ aan de vereiste betrekking $\alpha + (-\alpha) = 0$. Als we nu voor $\beta - \alpha$ kiezen $\beta + (-\alpha)$ dan voldoet dit aan de vereiste betrekking $\alpha + (\beta - \alpha) = \beta$. Immers $\alpha + [\beta + (-\alpha)] = \alpha + [(-\alpha) + \beta] = [\alpha + (-\alpha)] + \beta = 0 + \beta = \beta$.

$$(3.5) \quad -(\alpha + \beta) = -\alpha - \beta.$$

$$(3.6) \quad -(\alpha - \beta) = -\alpha + \beta.$$

De optelling van gehele getallen is associatief en er bestaat een ondubbelzinnig bepaalde omkering (aftrekking). Een verzameling met een dergelijke operatie heet een groep (t.o.v. die operatie). In dit geval is het zelfs een commutatieve groep (ook wel genoemd Abelse groep naar de Noorse mathematicus Abel), omdat de optelling commutatief is.

We definiëren nu

$$+a > 0$$

$$-a < 0$$

$$\alpha < \beta \text{ als } \beta - \alpha > 0.$$

(3.7) Tussen α en β bestaat één en slechts één van de drie relaties $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$, $\beta < \alpha$.

(3.8) Uit $\alpha < \beta$ en $\beta < \gamma$ volgt $\alpha < \gamma$.

(3.9) Uit $\alpha < \beta$ volgt $\alpha + 1 \leq \beta$ en omgekeerd.

(3.10) Uit $\alpha \leq \beta$ volgt $\alpha < \beta + 1$ en omgekeerd.

(3.11) Uit $\alpha < \beta$ volgt $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$ en omgekeerd.

Opgave 10. Bewijs (3.7) en (3.8)

We definiëren nu het product van twee gehele getallen als volgt:

$$0 \alpha = \alpha 0 = 0$$

$$(+a)(+b) = (-a)(-b) = +(ab)$$

$$(+a)(-b) = (-a)(+b) = -(ab).$$

$$(3.12) \quad \alpha \beta = \beta \alpha.$$

$$(3.13) \quad (\alpha \beta) \gamma = \alpha (\beta \gamma).$$

$$(3.14) \quad \alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

$$(3.15) \quad \text{Uit } \alpha\beta = \alpha\gamma \text{ en } \alpha \neq 0 \text{ volgt } \beta = \gamma.$$

$$(3.16) \quad \text{Uit } \alpha \neq 1 \text{ volgt } \alpha\beta \neq 1.$$

Een verzameling met een optelling en een vermenigvuldiging, die t.o.v. de optelling een commutatieve groep is en waarvan de vermenigvuldiging associatief is en distributief t.o.v. de optelling, heet een ring. Als de vermenigvuldiging ook nog commutatief is, spreken we van een commutatieve ring (in een ring wordt de optelling dus altijd commutatief verondersteld). Een commutatieve ring, die bovendien aan (3.15) voldoet,

heet een integriteitsgebied. Eigenschap (3.15) komt op hetzelfde neer als: uit $\alpha\beta = 0$ volgt $\alpha = 0$ of $\beta = 0$ (er zijn geen nuldelers).

(3.17) Uit $\alpha < \beta$ en $\gamma > 0$ volgt $\alpha\gamma < \beta\gamma$.

(3.18) Uit $\alpha < \beta$ en $\gamma = 0$ volgt $\alpha\gamma = \beta\gamma$.

(3.19) Uit $\alpha < \beta$ en $\gamma < 0$ volgt $\alpha\gamma > \beta\gamma$.

(3.20) Uit $\alpha\gamma < \beta\gamma$ en $\gamma > 0$ volgt $\alpha < \beta$.

(3.21) $\alpha\gamma < \beta\gamma$ en $\gamma = 0$ is onmogelijk.

(3.22) Uit $\alpha\gamma < \beta\gamma$ en $\gamma < 0$ volgt $\alpha > \beta$.

De gehele getallen > 0 heten positief (dat zijn dus die van de vorm $+a$), die < 0 negatief (die van de vorm $-a$).

De positieve gehele getallen gedragen zich, wat optelling, vermenigvuldiging, ordening en eventueel aftrekking betreft, precies als de overeenkomstige natuurlijke getallen. Immers:

$$(+a) + (+b) = + (a+b)$$

$$(+a) (+b) = + (ab)$$

$$(+a) > (+b) \text{ dan en slechts dan als } a > b \text{ is.}$$

$$(+b) - (+a) = +(b-a) \text{ als } b > a.$$

Verder stemt ook het voorgeplaatste minteken, zoals dat gedefinieerd is voor gehele getallen, toegepast op een positief getal overeen met het minteken, dat een natuurlijk getal in het bijbehorende negatieve verandert:

$$- (+a) = -a.$$

We kunnen dus zonder bezwaar de positieve getallen uit de verzameling der gehele getallen verwijderen en daarvoor de overeenkomstige natuurlijke getallen in de plaats stellen. Dan vormt de verzameling der gehele getallen een uitbreiding van de verzameling der natuurlijke getallen. We kunnen dan ook het onderscheid in het gebruik van Griekse en Latijnse letters laten vervallen en ook de gehele getallen alle met Latijnse letters aanduiden. De natuurlijke getallen zijn dus nu hetzelfde als de positieve gehele getallen.

(3.23) G is aftelbaar oneindig.

Dit volgt uit (2.24) toegepast op de collectie bestaande uit 0 , de verzameling der positieve en die der negatieve getallen, die aftelbaar zijn. G kan niet eindig zijn, omdat N een deelverzameling van G is en N niet eindig is; (2.19) en (2.21).

Een verzameling V gehele getallen heet begrensd, als er een positief geheel getal a is zodat voor alle $x \in V$ geldt $-a \leq x \leq a$.

(3.24) Een begrensde verzameling gehele getallen is eindig; een eindige verzameling gehele getallen is begrensd.

(3.25) Een begrensde (en dus eindige) verzameling gehele getallen heeft een grootste en een kleinste element.

Evenals bij de natuurlijke getallen is $a \cdot x = b$ voor twee gehele getallen niet altijd oplosbaar (3.16). Als het echter wel oplosbaar is en $a \neq 0$, dan is er maar één oplossing, $\frac{b}{a}$ genaamd (3.15).

Opgave 11. Gegeven zijn twee gehele getallen a en b ($a < b$). Bewijs dat het aantal gehele getallen x , die voldoen aan $a < x \leq b$, gelijk is aan $b - a$.

§ 4. Aequivalentieklassen.

De volgende stap bij de uitbreiding van het getalbegrip is de invoering van de rationale getallen, die ten doel heeft de deling, althans door getallen $\neq 0$, onbegrensd mogelijk te maken. We zullen dit doen door formeel quotiënten $\frac{a}{b}$ in te voeren, waarin a en b gehele getallen zijn met $b \neq 0$ en daarvoor rekenregels vast te stellen. Het zal daarbij echter noodzakelijk blijken quotiënten, die formeel verschillend zijn, toch gelijk te stellen. Laat $ad = bc$ zijn ($b \neq 0, d \neq 0$) en noem $\frac{a}{b} = x, \frac{c}{d} = y$, dan is $a = bx, c = dy$ en $bdx = bxd = ad = bc = bdy$ en dus, daar $bd \neq 0, x = y$. Voor deze gelijkstelling dient de theorie der aequivalentieklassen, die we trouwens ook later nog nodig zullen hebben.

Ga uit van een verzameling V en verdeel die in deelverzamelingen, die disjunct zijn en samen V opvullen.

Een collectie F van verzamelingen, die voldoet aan

- 1° voor alle $W \in F$ geldt $W \subset V$;
- 2° als $W \in F, W' \in F, W \neq W'$, dan zijn W en W' disjunct;
- 3° de vereniging van alle $W \in F$ is V ;

heet een klasse-indeling van V (de verzamelingen W heten klassen, F de verzameling klassen).

Een relatie $\sim$ tussen elementen van V (schrijf $a \sim b$ resp. $a \not\sim b$, als de relatie wel resp. niet vervuld is) heet een aequivalentierelatie als zij reflexief, symmetrisch en transitief is, d.w.z. als geldt

$$a \sim a$$

$$\text{uit } a \sim b \text{ volgt } b \sim a$$

$$\text{uit } a \sim b \text{ en } b \sim c \text{ volgt } a \sim c.$$

(4.1) Als een klasse-indeling van een verzameling V gegeven is, is de relatie die gedefinieerd wordt door $a \sim b$ dan en slechts dan als a en b in dezelfde klasse liggen, een aequivalentierelatie. We noemen deze de aequivalentierelatie die behoort bij de gegeven klasse-indeling.

De definitie is zinvol, omdat ieder element van V volgens 2^0 en 3^0 in één en slechts één klasse ligt. De rest van (4.1) is direct duidelijk.

Het merkwaardige is nu, dat (4.1) omgekeerd kan worden, als volgt:
(4.2) Als een aequivalentierelatie op een verzameling V gegeven is, is er een klasse-indeling van V te vinden, waar die aequivalentierelatie bij behoort.

Bewijs: Definieer bij iedere $a \in V$ de verzameling W_a bestaande uit die $x \in V$, waarvoor geldt $a \sim x$. Beschouw de collectie F bestaande uit de verschillende onder de W_a . We bewijzen, dat F een klasse-indeling van V is. Aan 1^0 is automatisch voldaan. Om 2^0 te bewijzen nemen we twee verschillende W_a en W_b en tonen aan dat ze disjunct zijn. Omdat ze verschillend zijn is er een c die wel in de ene maar niet in de andere ligt, b.v. $c \in W_a$, $c \notin W_b$, dus $a \sim c$, $b \not\sim c$. Als W_a en W_b niet disjunct waren, was er een d met $d \in W_a$, $d \in W_b$, dus $a \sim d$, $b \sim d$. Uit $a \sim d$ volgt $d \sim a$ (symmetrie); uit $b \sim d$ en $d \sim a$ volgt $b \sim a$ (transitiviteit); uit $b \sim a$ en $a \sim c$ volgt $b \sim c$ (transitiviteit). Dit geeft een tegenspraak, dus W_a en W_b zijn disjunct. 3^0 is vervuld omdat uit $a \sim a$ (reflexiviteit) volgt $a \in W_a$. Dus F is een klasse-indeling van V . De aequivalentierelatie behoort nu ook bij F , want als $a \sim c$ is, is $c \in W_a$ en $a \in W_a$, dus a en c liggen in dezelfde klasse. Als $a \not\sim c$ is, is $c \notin W_a$, $a \in W_a$, dus a en c liggen in verschillende klassen.

Het verband tussen klasse-indelingen en aequivalentierelaties is dus wederkerig. We zeggen dat F uit V ontstaat door de aequivalente elementen te identificeren. De aequivalentie zou men een kunstmatig ingevoerde gelijkheid kunnen noemen.

Een eenvoudig voorbeeld van een aequivalentierelatie is de (echte) gelijkheid. Deze voldoet inderdaad, zoals al eerder opgemerkt, aan de eisen. De bijbehorende klasse-indeling bestaat uit klassen, die ieder uit één element bestaan. Er is dus niets geïdentificeerd, behalve wat al gelijk was.

Een ander uiterste is de aequivalentierelatie, die voor ieder paar uit V geldt. De bijbehorende klasse-indeling bestaat dan uit één klasse, n.l. V zelf. Alle elementen van V worden geïdentificeerd.

De gehele getallen van de vorm $2a$ (a geheel) heten even; die van de vorm $2a - 1$ oneven.

Opgave 12. Bewijs dat de verzameling der even en die der oneven getallen een klasse-indeling van G vormen.

§5. Rationale getallen.

Alvorens over te gaan tot de formele invoering der rationale getallen zullen we eerst nagaan, hoe we de rekenregels zullen moeten definiëren. Neem twee quotiënten $\frac{a}{b}$ en $\frac{c}{d}$. We willen hun som, verschil en product bepalen. Noem $\frac{a}{b} = x$, $\frac{c}{d} = y$ dan is $a = b x$, $c = d y$. Nu is $ad = b x d = b d x$, $bc = b d y$, dus $ad + bc = bdx + bdy = bd(x + y)$, dus $x + y = \frac{ad + bc}{bd}$. Evenzo $x - y = \frac{ad - bc}{bd}$. Verder is $ac = bxdy = b dxy$, dus $xy = \frac{ac}{bd}$.

Nu gaan we formeel te werk. Om alle verwarring met quotiënten te vermijden, schrijven we paren (a, b) . Men kan hierbij alvast aan quotiënten $\frac{a}{b}$ denken.

We nemen alle paren (a, b) waarin a en b willekeurige gehele getallen zijn, maar $b \neq 0$. We noemen twee zulke paren equivalent:

$(a, b) \sim (c, d)$ dan en slechts dan als $ad = bc$.

(5.1) De relatie gedefinieerd door " $(a, b) \sim (c, d)$ dan en slechts dan als $ad = bc$ " is een equivalentierelatie.

Bewijs: $(a, b) \sim (a, b)$, omdat $ab = ba$.

Uit $(a, b) \sim (c, d)$ volgt $(c, d) \sim (a, b)$, want uit $ad = bc$ volgt $cb = da$.

Uit $(a, b) \sim (c, d)$ en $(c, d) \sim (e, f)$ volgt $(a, b) \sim (e, f)$, want uit $ad = bc$ en $cf = de$ volgt $afd = adf = bcf = bde = bed$, dus wegens $d \neq 0$, $af = be$.

Een klasse equivalente paren noemen we nu een rationaal getal. De rationale getallen duiden we voorlopig aan met Griekse, de gehele met Latijnse letters.

We definiëren nu de som van twee paren als volgt:

$$(a, b) + (c, d) = (ad + bc, bd).$$

Omdat uit $b \neq 0$, $d \neq 0$ volgt dat $bd \neq 0$, geeft het een paar van de beschouwde soort.

We willen nu de som van twee rationale getallen α en β als volgt definiëren: kies een paar $(a, b) \in \alpha$ (men noemt dat een representant uit de klasse α) en een paar $(c, d) \in \beta$ en definieren $\alpha + \beta$ als de klasse, waar $(ad + bc, bd)$ in ligt. Men noemt dit een representantsgewijze definitie. Zij is alleen dan zinvol, als het resultaat onafhankelijk is van de keuze van de representanten. Dat is het geval als de volgende stelling geldt.

(5.2) Als $(a, b) \sim (a', b')$ en $(c, d) \sim (c', d')$, dan is $(ad + bc, bd) \sim (a'd' + b'c', b'd')$.

Bewijs: Gegeven is $ab' = ba'$ en $cd' = dc'$. Nu is

$$(ad + bc) b'd' = ad b'd' + bcb'd' = ab'dd' + cd'bb' = ba'dd' + dc'bb' = a'd'bd + b'c'bd = (a'd' + b'c') bd.$$

Dus $(ad + bc, bd) \sim (a'd' + b'c', b'd')$.

Geheel analoog definiëren we het verschil representantsgewijze door

$$(a,b) - (c,d) = (ad - bc, bd).$$

(5.3) Als $(a,b) \sim (a',b')$ en $(c,d) \sim (c',d')$, dan is $(ad - bc, bd) \sim (a'd' - b'c', b'd')$.

Het bewijs is analoog als dat van (5.2).

$$(5.4) \quad \alpha + \beta = \beta + \alpha.$$

$$(5.5) \quad (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma).$$

$$(5.6) \quad \alpha + (\beta - \alpha) = \beta.$$

$$(5.7) \text{ Uit } \alpha + \beta = \alpha + \gamma \text{ volgt } \beta = \gamma.$$

Deze stellingen worden met representanten bewezen. (5.7) kan eenvoudiger direct uit (5.6) afgeleid worden.

Opgave 13. Bewijs (5.5).

Uit (5.4) t/m (5.7) volgt, dat de rationale getallen een commutatieve groep vormen t.o.v. de optelling.

(5.8) De paren $(0,a)$ (a willekeurig, maar $\neq 0$) vormen een klasse.

Bewijs: $(0,a) \sim (0,b)$ omdat $0b = 0$ en $a0 = 0$. Als $(0,a) \sim (x,y)$, dan is $0 = 0y = ax$, maar $a \neq 0$, dus $x = 0$.

We noemen de klasse der $(0,a)$ voorlopig ω . Het is de nul der rationale getallen:

$$(5.9) \quad \omega + \alpha = \alpha.$$

We noemen $\omega - \alpha$ weer $-\alpha$.

$$(5.10) \text{ Als } (a,b) \in \alpha, \text{ dan } (-a,b) \in -\alpha.$$

Opgave 14. Bewijs (5.9) en (5.10).

We noemen $\alpha > \omega$, als voor $(a,b) \in \alpha$ geldt $ab > 0$. Deze definitie wordt gerechtvaardigd door:

$$(5.11) \text{ Als } (a,b) \sim (c,d) \text{ en } ab > 0, \text{ dan } cd > 0.$$

Bewijs: $ad = bc$ en $ab > 0$ zijn gegeven. Daar $d \neq 0$, is $d > 0$ of $d < 0$. Als $d > 0$ is $abd > 0$, dus $bdc > 0$, maar $bb > 0$ altijd als $b \neq 0$, dus $c > 0$, dus $cd > 0$. Als $d < 0$, dan analoog $c < 0$, dus $cd > 0$.

We noemen $\alpha < \omega$ als $-\alpha > \omega$.

$$(5.12) \text{ Als } \alpha < \omega \text{ en } (a,b) \in \alpha \text{ dan is } ab < 0; \text{ als } (a,b) \in \alpha \text{ en } ab < 0 \text{ dan is } \alpha < \omega. \text{ [Dit volgt uit (5.10) en (5.11).]}$$

We definiëren $\alpha > \beta$ als $\alpha - \beta > \omega$.

(5.13) Tussen twee rationale getallen α en β bestaat één en slechts één van de relaties $\alpha > \beta$, $\alpha = \beta$, $\alpha < \beta$.

$$(5.14) \text{ Uit } \alpha < \beta \text{ en } \beta < \gamma \text{ volgt } \alpha < \gamma.$$

$$(5.15) \text{ Uit } \alpha < \beta \text{ volgt } \alpha + \gamma < \beta + \gamma.$$

We definiëren het product van twee rationale getallen representantsgewijze door

$$(a,b)(c,d) = (ac,bd)$$

(5.16) Als $(a,b) \sim (a',b')$ en $(c,d) \sim (c',d')$ dan $(ac,bd) \sim (a'c',b'd')$.

Opgave 15. Bewijs (5.16).

(5.17) $\alpha\beta = \beta\alpha.$

(5.18) $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma).$

(5.19) $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma.$

(5.20) $\alpha(-\beta) = -\alpha\beta.$

(5.21) Uit $\alpha > \beta$ en $\gamma > \omega$ volgt $\alpha\gamma > \beta\gamma.$

(5.22) De paren (a,a) (a willekeurig, maar $\neq 0$) vormen een klasse.

Opgave 16. Bewijs (5.21) en (5.22).

We noemen de klasse der (a,a) voorlopig ε . Het is de één der rationale getallen:

(5.23) $\xi\alpha = \alpha.$

(5.24) Uit $\alpha/\beta = \alpha\gamma$ en $\alpha \neq \omega$ volgt $\beta = \gamma.$

(5.25) Bij iedere $\alpha \neq \omega$ is een ξ te vinden, zodat $\alpha\xi = \varepsilon$. We noemen deze oplossing $\frac{\varepsilon}{\alpha}$.

Bewijs: Kies $(a,b) \in \alpha$, dan is, omdat $\alpha \neq \omega$, $a \neq 0$. Neem voor $\frac{\varepsilon}{\alpha}$ de klasse, waar (b,a) in ligt, dan is wegens $(a,b)(b,a) = (ab,ba) = (ab,ab) \in \varepsilon$, $\alpha \frac{\varepsilon}{\alpha} = \varepsilon$.

(5.26) Bij iedere α en β ($\alpha \neq \omega$) is een ξ te vinden, zodat $\alpha\xi = \beta$, n.l. $\xi = \frac{\varepsilon}{\alpha}\beta$. We schrijven daarvoor ook $\frac{\beta}{\alpha}$.

Uit (5.26) volgt, dat deling van β door α altijd mogelijk is, mits $\alpha \neq \omega$ is; uit (5.24) volgt, dat deze deling op niet meer dan één manier mogelijk is.

Een commutatieve ring, waarin deling door alle elementen die niet nul zijn mogelijk is, heet een lichaam.

De gehele getallen gedragen zich, wat optelling, aftrekking en ordening betreft, geheel hetzelfde als de rationale getallen die paren van de vorm $(a,1)$ bevatten. Tevens bevat ieder rational getal hoogstens één paar van die vorm:

Uit $(a,1) \sim (b,1)$ volgt $a = b$.

$$(a,1) \pm (b,1) = (a \pm b,1).$$

$$(a,1)(b,1) = (ab,1).$$

Als $(a,1) \in \alpha$, $(b,1) \in \beta$, dan is $\alpha < \beta$, dan en slechts dan als $a < b$. Als $(a,1) \in \alpha$, dan $(-a,1) \in \alpha$.

We kunnen dus zonder bezwaar de rationale getallen, die een paar van de vorm $(a,1)$ bevatten, uit de verzameling der rationale getallen verwijderen en er de overeenkomstige gehele getallen voor in de plaats stellen. De verzameling R der rationale getallen is dan een uitbreiding

van die der gehele getallen. Hierbij is $w = 0$ en $\varepsilon = 1$.

(5.27) Als $(a, b) \in \alpha$, dan is $\alpha = \frac{a}{b}$, en omgekeerd.

Bewijs: $\frac{a}{b}$ bevat het paar $(1, b)(a, 1) = (a, b)$.

We kunnen het onderscheid in het gebruik van Griekse en Latijnse letters nu laten vervallen. Alles wat over de paren gehele getallen bewezen is, geldt nu voor quotiënten van gehele getallen. We noemen zo'n quotiënt $\frac{a}{b}$ van gehele getallen ook een breuk; a is de teller, b de noemer.

We kunnen (5.27) ook zo formuleren: Ieder rationaal getal is te schrijven als het quotiënt van twee gehele getallen. Dit is echter op meer dan één verschillende manier mogelijk, n.l. met ieder paar uit het rationale getal correspondeert een quotiënt (breuk). Onder al deze breuken kiezen we nu één uit, die we de standaardschrijfwijze van het rationale getal zullen noemen, als volgt: Uit het feit, dat $\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}$, volgt, dat onder de noemers, die in de breuken optreden, positieve zijn. De verzameling van de positieve gehele getallen, die als noemer in een breukvoorstelling van een bepaald rationaal getal kunnen optreden, is dus niet leeg en heeft dus volgens (2.12) een kleinste element. Daar uit $\frac{a}{x} = \frac{c}{b}$ volgt $a = c$, behoort bij dit kleinste element één en slechts één: breuk. De standaardschrijfwijze van een rationaal getal is nu de breuk, die gelijk is aan het rationale getal met de kleinste positieve noemer.

Daar 1 het kleinste positieve gehele getal is, is de standaardschrijfwijze van een geheel getal a juist $\frac{a}{1}$. Verder is een rationaal getal dan en slechts dan positief resp. negatief als in de standaardschrijfwijze de teller positief resp. negatief is.

(5.28) Stelling van Archimedes. Bij ieder rationaal getal a is een natuurlijk getal te vinden dat groter is.

Bewijs: Als $a \leq 0$ is, voldoet $1 > 0 \geq a$. Als $a > 0$ is, kiezen we de standaardschrijfwijze $a = \frac{c}{b}$, dan is $b > 0$, $c > 0$. Dan is echter $\frac{c}{b} < b + 1$. Opgave 17. Bewijs, dat uit b en c geheel, $b > 0$, $c > 0$ volgt $\frac{c}{b} < b + 1$.

Twee gehele getallen a en b heten opeenvolgend, als $b = a + 1$.

We zeggen, dat het rationale getal c tussen de rationale getallen a en b ligt als $a \leq c \leq b$ of $b \leq c \leq a$.

(5.29) Ieder rationaal getal ligt tussen twee opeenvolgende gehele getallen.

Bewijs: Als $a \geq 0$ is, is er volgens (5.28) een natuurlijk getal $> a$, dus een kleinste natuurlijk getal $n > a$. Nu is $n - 1 \geq 0$ (3.10). Als $n - 1 = 0$ is, is $n - 1 = 0 \leq a$; als $n - 1 > 0$ is, is $n - 1$ een natuurlijk getal, dus $n - 1 \leq a$. In beide gevallen is $n - 1 \leq a < n$. Als $a < 0$, is $-a > 0$, dus er is een natuurlijk getal n zodat $n - 1 \leq -a < n$, dus is $-n < a \leq -n + 1$.

(5.30) Tussen twee opeenvolgende gehele getallen ligt geen geheel getal, dat van beide verschilt.

Dit volgt uit (3.10).

(5.31) Tussen twee verschillende rationale getallen ligt altijd nog een rationaal getal, dat van beide verschilt.

Bewijs: $a \neq b$. Laat $a < b$ zijn. Dan is $\frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2} > 0$ en $b - \frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2} > 0$; dus $a < \frac{a+b}{2} < b$.

Stelling (5.31) drukt men ook zo uit: de rationale getallen vormen een overal dichte verzameling.

Een verzameling V rationale getallen heet begrensd, als er een positief rationaal getal a (en dus ook een natuurlijk getal) te vinden is, zodat voor alle $x \in V$ geldt $-a \leq x \leq a$.

(5.32) Een eindige verzameling rationale getallen is begrensd.

Het omgekeerde van deze stelling geldt niet: de verzameling rationale getallen $\frac{1}{n}$ (n willekeurig natuurlijk) is begrensd, want $-1 \leq \frac{1}{n} \leq 1$, maar aftelbaar oneindig, want, daar uit $\frac{1}{m} = \frac{1}{n}$ volgt $m = n$, is de afbeelding $\frac{1}{n} \rightarrow n$ een eeneenduidige afbeelding op de verzameling der natuurlijke getallen.

(5.33) De verzameling der rationale getallen is aftelbaar oneindig.

Het bewijs verloopt volgens het volgende schema: we tellen eerst de rationale getallen x af, die voldoen aan $0 < x \leq 1$. In de standaard-schrijfwijze van deze getallen is de teller positief en kleiner dan de noemer. We tellen eerst de (eindig veel) breuken met noemer 1, dan die met noemer 2, die met noemer 3 enz., dus

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \dots$$

Dit geeft aftelbaar oneindig veel rationale getallen met $0 < x \leq 1$.

Evenzo voor $n < x \leq n+1$ (n willekeurig geheel). Dit geeft aftelbaar veel aftelbare verzamelingen. Dus zijn volgens (2.24) de rationale getallen aftelbaar. Eindig kunnen ze niet zijn, omdat ze $\mathbb{N}$ als deelverzameling bevatten.

We definiëren de absolute waarde (of de modulus) $|a|$ van een rationaal getal a als volgt:

$$\begin{aligned} |a| &= a && \text{als } a \geq 0, \\ |a| &= -a && \text{" } a < 0. \end{aligned}$$

$$(5.34) \quad |-a| = |a|.$$

$$(5.35) \quad |a| \geq 0 \text{ en dan en slechts dan } = 0, \text{ als } a = 0.$$

$$(5.36) \quad |ab| = |a| |b|.$$

$$(5.37) \quad |a+b| \leq |a| + |b| \quad (\text{driehoeksongelijkheid; de verklaring van deze naam komt later}).$$

Opgave 18. Bewijs (5.37).

Opgave 19. Bewijs met behulp van (5.37):

$$|a - b| \leq |a| + |b| ,$$

$$||a| - |b|| \leq |a - b| .$$

§6. Algemene sommen en producten. Machten.

We gaan uit van een verzameling V waarop een operatie gedefinieerd is, die we maar met $+$ zullen aanduiden, hoewel het volgende ook geldt voor andere operaties, b.v. het product. Als we een afbeelding (niet noodzakelijk eeneenduidig!) a_i hebben van een beginstuk $[1, n]$ der natuurlijke getallen in V , definiëren we $\sum_{i=1}^n a_i$ door volledige inductie als volgt

$$\sum_{i=1}^1 a_i = a_1 ,$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = \sum_{i=1}^k a_i + a_{k+1} .$$

(6.1) Als de operatie $+$ associatief is, geldt:

$$\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^m a_{n+i} = \sum_{i=1}^{n+m} a_i \quad (\text{algemene associatieve eigenschap})$$

Opgave 20. Bewijs dit door volledige inductie naar m .

In plaats van $\sum_{i=1}^m a_{n+i}$ schrijven we ook wel $\sum_{i=n+1}^{n+m} a_i$.

(6.2) Als de operatie $+$ associatief en commutatief is, en $\varphi(i)$ is een eeneenduidige afbeelding van $[1, n]$ op zichzelf, dan geldt:

$$\sum_{i=1}^n a_{\varphi(i)} = \sum_{j=1}^n a_j \quad (\text{algemene commutatieve eigenschap})$$

Men bewijst dit door volledige inductie naar n .

Als W een niet-lege eindige verzameling is en $a(x)$ een afbeelding van W in een verzameling V , waarop een associatieve en commutatieve operatie $+$ gedefinieerd is, kunnen we $\sum_W a(x)$ definiëren door de elementen x van W te nummeren x_i en te definiëren (als n het aantal elementen van W is):

$$\sum_W a(x) = \sum_{i=1}^n a(x_i) .$$

Wegens (6.2) is deze definitie onafhankelijk van de gekozen nummering. In plaats van W zelf schrijft men ook wel betrekkingen die W bepalen onder het $\sum$ -teken, b.v.

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}.$$

(6.3) Als V een ring is, die de verzameling der natuurlijke getallen omvat, geldt

$$\sum_{i=1}^n a = n a.$$

Men bewijst dit met volledige inductie.

Aan (6.3) ziet men, dat voor natuurlijke getallen de vermenigvuldiging een herhaalde optelling is.

Als de operatie een vermenigvuldiging is schrijft men $\prod$ i.p.v. $\sum$, dus

$$\prod_{i=1}^1 a_i = a_1, \quad \prod_{i=1}^{n+1} a_i = \left(\prod_{i=1}^n a_i \right) a_{n+1}.$$

Hiervoor gelden analoge stellingen als (6.1) en (6.2).

We definiëren nu een macht van a als volgt:

$$a^n = \prod_{i=1}^n a.$$

We noemen a het grondtal, n de exponent.

(6.4) Als de vermenigvuldiging associatief is, geldt:

$$a^m a^n = a^{m+n}, \\ (a^m)^n = a^{mn}.$$

(6.5) Als de vermenigvuldiging associatief en commutatief is, geldt:

$$a^m b^n = (ab)^{mn}.$$

Opgave 21. Bewijs (6.4) en (6.5).

In een lichaam definiëren we nu ook machten met willekeurige gehele exponenten, mits het grondtal $\neq 0$ is, als volgt

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (n \text{ een natuurlijk getal}).$$

(6.6) Als a en b elementen van een lichaam zijn ($a \neq 0$, $b \neq 0$) en m en n gehele getallen, geldt

$$a^m a^n = a^{m+n}, \\ a^m b^n = (ab)^{mn}, \\ \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b} \right)^m, \\ (a^m)^n = a^{mn}.$$

Opgave 22. Bewijs dat, als de optelling associatief en commutatief is, geldt:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n a_{ij}.$$

Opgave 23. Bewijs

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2} n (n+1),$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6} n (n+1)(2n+1).$$

Opgave 24. De operatie $\cup$ toegepast op deelverzamelingen van een vaste verzameling R is een operatie die associatief en commutatief is. Bewijs dit. Als we dus $\bigcup_{i=1}^n V_i$ analoog als boven definiëren (hoe?),

gelden analoge stellingen als (6.1) en (6.2). Analoge beschouwingen kunnen voor $\cap$ gehouden worden.

§ 7. Convergente rijen en fundamentealrijen.

Met rationale getallen zijn de vier hoofdbewerkingen onbegrensd uitvoerbaar. Ze vertonen echter toch nog tekortkomingen, waarvan in de volgende stelling een voorbeeld gegeven wordt.

(7.1) Er is geen rationaal getal x , waarvoor geldt $x^2 = 2$.

Bewijs: Daar $x^2 = (-x)^2$ mogen we ons tot positieve rationale getallen beperken. Stel, dat er wel een dergelijk rationaal getal is, dan is er onder alle breuken waarvan het kwadraat 2 is één met een kleinste positieve noemer. Noem deze $\frac{a}{b}$, dan is $a^2 = 2b^2$. Nu is $a > b$, want uit $a \leq b$ zou volgen

$a^2 \leq ab \leq b^2 < 2b^2$, dus $a^2 < 2b^2$ hetgeen niet't geval is. Verder is $a < 2b$, want uit $a > b$ volgt $a^2 > ab$, en als $a \geq 2b$ was, was $ab \geq 2b^2$, dus $a^2 > 2b^2$, hetgeen niet het geval is. Vormen we nu $\frac{2b-a}{a-b}$, dan is dit een breuk met positieve noemer, waarvan het kwadraat

$$\frac{4b^2 - 4ab + a^2}{a^2 - 2ab + b^2} = \frac{6b^2 - 4ab}{3b^2 - 2ab} = 2. \quad \text{Maar nu geeft } 0 < a - b < b \text{ een}$$

tegenspraak, omdat b de kleinste positieve noemer van de breuken met kwadraat 2 was.

Een ander bewijs van deze stelling kan geleverd worden met behulp van het resultaat van opgave 12.

Weliswaar kunnen we geen rationaal getal vinden, waarvan het kwadraat 2 is, maar we kunnen wel een "benadering" vinden, als volgt:

$$\begin{array}{ll}
 1^2 < 2 & , \quad 2^2 > 2 \\
 (1,4)^2 < 2 & , \quad (1,5)^2 > 2 \\
 (1,41)^2 < 2 & , \quad (1,42)^2 > 2 \\
 (1,414)^2 < 2 & , \quad (1,415)^2 > 2 \quad \text{enz.}
 \end{array}$$

Deze opeenvolgende benaderingen komen hoe langer hoe dichter bij elkaar te liggen. B.v. verschillen alle volgende van 1,41 minder dan $\frac{1}{100}$. Nemen we een ander voorbeeld van een dergelijke rij getallen: 0,9; 0,99; 0,999; 0,9999 enz., dan komen deze niet alleen willekeurig dicht bij elkaar te liggen, maar ook willekeurig dicht bij een vast rationaal getal, n.l. 1. In het eerste geval is dat niet zo en het zal het doel van de invoering van reële getallen zijn, te maken, dat dat wel zo wordt. We zullen nu de daartoe benodigde begrippen precisieren.

Een rij elementen van een verzameling V is een afbeelding van de verzameling natuurlijke getallen in V . We kunnen dit aangeven met a_n als het element dat aan het natuurlijke getal n is toegevoegd. De afbeelding behoeft niet eeneenduidig te zijn. Zo is b.v. $a_n = a$ voor alle n ook een rij (constante rij). Voorlopig beperken ^{we} ons tot rijen rationale getallen.

Een rij a_n heet begrensd als er een rationaal getal $C > 0$ bestaat, zodat $|a_n| \leq C$ voor alle n .

Een rij a_n heet convergent (anders uitgedrukt: een rij convergeert) met limiet a (schrijfwijze: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$), als bij ieder positief rationaal getal ϵ een natuurlijk getal N te vinden is, zodat voor alle natuurlijke getallen n met $n > N$ geldt $|a - a_n| < \epsilon$.

Het feit dat N van ϵ afhangt, drukken we wel uit door te schrijven $N(\epsilon)$.

Een rij a_n heet een fundamenteaalrij, als bij ieder positief rationaal getal ϵ een natuurlijk getal $N(\epsilon)$ te vinden is, zodat voor alle natuurlijke getallen m en n met $m > N$ en $n > N$ geldt $|a_m - a_n| < \epsilon$.

(7.2) Een convergente rij is een fundamenteaalrij.

Bewijs: Stel $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, dan is bij iedere $\epsilon > 0$ een $N(\frac{\epsilon}{2})$ te vinden, zodat voor $n > N$ geldt $|a - a_n| < \frac{\epsilon}{2}$. Als dan $m > N$ en $n > N$, is $|a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \leq |a_m - a| + |a - a_n| = |a - a_m| + |a - a_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

(7.3) Een convergente rij heeft niet meer dan één limiet.

Bewijs: Stel $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$, $a \neq b$. Dan is $|a - b| > 0$. Er is dan een $N_1(\frac{1}{2}|a - b|)$ zodat voor $n > N_1$ geldt $|a - a_n| < \frac{1}{2}|a - b|$ en een $N_2(\frac{1}{2}|a - b|)$ zodat voor $n > N_2$ geldt $|b - a_n| < \frac{1}{2}|a - b|$. Noem de

grootste van N_1 en N_2 nu N (schrijfwijze $N = \max(N_1, N_2)$) dan is voor $n > N$ zowel $|a - a_n| < \frac{1}{2}|a - b|$ als $|b - a_n| < \frac{1}{2}|a - b|$. Dan is $|a - b| \leq |a - a_{N+1}| + |b - a_{N+1}| < \frac{1}{2}|a - b| + \frac{1}{2}|a - b| = |a - b|$, hetgeen een tegenspraak geeft.

(7.4) Een fundamenteaalrij is begrensd.

Bewijs: Laat a_n een fundamenteaalrij zijn. Dan is een $N(1)$ te vinden zodat voor $m > N$ geldt $|a_m - a_{N+1}| < 1$, dus $|a_m| \leq |a_m - a_{N+1}| + |a_{N+1}| < 1 + |a_{N+1}|$. De verzameling van de natuurlijke getallen $m \leq N$ is eindig (aantal N), dus ook de verzameling der a_m voor $m \leq N$ (aantal $\leq N$), dus deze is begrensd, $-C_1 < a_m < C_1$, $|a_m| < C_1$. Noemt men $C = \max(C_1, 1 + |a_{N+1}|)$, dan is $|a_m| < C$ voor alle m .

Stelling (7.2) kan niet omgekeerd worden; niet iedere fundamenteaalrij is convergent. Neem $a_n = \frac{k_n}{n}$, waarin k_n het kleinste positieve gehele getal is, waarvoor

$$\frac{k_n^2}{n^2} > 2 \quad (\text{dus} \quad \frac{(k_n - 1)^2}{n^2} < 2). \quad \text{Dan is } n < k_n \leq 2n \text{ en}$$

$$0 < \frac{k_n^2}{n^2} - 2 < \frac{k_n^2}{n^2} - \frac{(k_n - 1)^2}{n^2} = \frac{2k_n - 1}{n^2} < \frac{4}{n}.$$

$$\left| \frac{k_n}{n} - \frac{k_m}{m} \right| = \frac{\left| \frac{k_n^2}{n^2} - \frac{k_m^2}{m^2} \right|}{\left| \frac{k_n}{n} + \frac{k_m}{m} \right|} \leq \frac{\left| \frac{k_n^2}{n^2} - 2 \right| + \left| \frac{k_m^2}{m^2} - 2 \right|}{\left| \frac{k_n}{n} + \frac{k_m}{m} \right|} < \frac{\frac{4}{n} + \frac{4}{m}}{2} = \frac{2}{n} + \frac{2}{m}. \quad \text{Neem}$$

een $\epsilon > 0$ en hierbij $N > \frac{4}{\epsilon}$, dan is voor $n > N$: $\frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \frac{\epsilon}{4}$ dus voor $n > N$, $m > N$ is $\frac{2}{n} + \frac{2}{m} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. De rij is een fundamenteaalrij, maar geen convergente rij, want voor de limiet a zou moeten gelden $a^2 = 2$ (hetgeen we niet zullen bewijzen).

Opgave 25. Bewijs, dat $2^n \geq 1 + n$ voor alle natuurlijke n .

Opgave 26. Bewijs, dat $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} = 0$.

Opgave 27. Bewijs, dat een constante rij convergeert.

Opgave 28. Ga na of de volgende rijen convergent zijn en zo ja met welke limiet:

a) $a_n = (-2)^{-n}$ (dus: $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$),

b) $a_{2n-1} = 0, a_{2n} = 2^{-n}$ (dus: $0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, \dots$),

c) $a_{2n-1} = 1, a_{2n} = 2^{-n}$ (dus: $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, \dots$),

d) $a_{2n-1} = 1, a_{2n} = \frac{n-1}{n}$ (dus: $1, 0, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{2}{3}, \dots$).

§8. Reële getallen.

Voor de invoering van de reële getallen zullen we gebruik maken van fundamentealrijen. We zullen daarbij, evenals bij de rationale getallen het geval was, nog identificaties moeten toepassen.

Een convergente rij met limiet nul heet een nulrij (Bij iedere $\varepsilon > 0$ is een N te vinden zodat voor $n > N$ geldt $|a_n| < \varepsilon$).

(8.1) Als a_n een nulrij is, dan ook $-a_n$.

(8.2) Als a_n en b_n nulrijen zijn, dan ook $c_n = a_n + b_n$.

Bewijs: (8.1) volgt uit $|-a_n| = |a_n|$. Voor (8.2) nemen we een willekeurige $\varepsilon > 0$. Hierbij is een $N_1(\frac{\varepsilon}{2})$ zodat voor $n > N_1$ geldt $|a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ en een $N_2(\frac{\varepsilon}{2})$ zodat voor $n > N_2$ geldt $|b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Voor $n > \max(N_1, N_2)$ geldt $|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

We beschouwen de verzameling van alle fundamentealrijen $\{a_n\}$ rationale getallen en voeren tussen deze een aequivalentie in volgens de definitie: $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ dan en slechts dan als $\{a_n - b_n\}$ een nulrij is.

(8.3) De relatie " $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ dan en slechts dan als $\{a_n - b_n\}$ een nulrij is" is een aequivalentierelatie.

Bewijs: $\{a_n\} \sim \{a_n\}$, want $\{a_n - a_n\} = \{0\}$ is een nulrij. Uit $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ volgt $\{b_n\} \sim \{a_n\}$, want als $\{a_n - b_n\}$ een nulrij is, dan ook $\{b_n - a_n\} = \{-(a_n - b_n)\}$. Uit $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ en $\{b_n\} \sim \{c_n\}$ volgt $\{a_n\} \sim \{c_n\}$ want als $\{a_n - b_n\}$ en $\{b_n - c_n\}$ nulrijen zijn, dan ook $\{a_n - c_n\} = \{(a_n - b_n) + (b_n - c_n)\}$.

Een klasse aequivalente fundamentealrijen noemen we nu een reëel getal. De reële getallen duiden we voorlopig aan met Griekse, de rationale met Latijnse letters.

We definiëren nu de som en het verschil van twee fundamentealrijen als volgt:

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\},$$

$$\{a_n\} - \{b_n\} = \{a_n - b_n\}.$$

Deze definitie wordt gerechtvaardigd door het feit, dat het resultaat weer een fundamentealrij is:

(8.4) Als $\{a_n\}$ en $\{b_n\}$ fundamentealrijen zijn, dan ook $\{a_n + b_n\}$ en $\{a_n - b_n\}$.

Bewijs: Bij $\varepsilon > 0$ is er een N , zodat voor $m > N, n > N$ geldt $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, en een N_2 , zodat voor $m > N_2, n > N_2$ geldt $|b_m - b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Noem $N = \max(N_1, N_2)$, dan is voor $m > N, n > N$

$$|(a_m + b_m) - (a_n + b_n)| = |(a_m - a_n) + (b_m - b_n)| \leq |a_m - a_n| + |b_m - b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Voor reële getallen definiëren we nu som en verschil representantsgewijze met behulp van bovenstaande definities. Dit is geoorloofd wegens:

(8.5) Als $\{a_n\} \sim \{a'_n\}$ en $\{b_n\} \sim \{b'_n\}$ dan is $\{a_n \pm b_n\} \sim \{a'_n \pm b'_n\}$.

Bewijs: $\{a_n - a'_n\}$ en $\{b_n - b'_n\}$ zijn nulrijen. Volgens (8.1) en (8.2) zijn dan ook $\{(a_n + b_n) - (a'_n + b'_n)\} = \{(a_n - a'_n) + (b_n - b'_n)\}$ en $\{(a_n - b_n) - (a'_n - b'_n)\} = \{(a_n - a'_n) + (b'_n - b_n)\}$ nulrijen.

$$(8.6) \quad \alpha + \beta = \beta + \alpha.$$

$$(8.7) \quad (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma).$$

$$(8.8) \quad \alpha + (\beta - \alpha) = \beta.$$

$$(8.9) \text{ Uit } \alpha + \beta = \alpha + \gamma \text{ volgt } \beta = \gamma.$$

Deze stellingen volgen direct uit de overeenkomstige voor rationale getallen. De reële getallen vormen dus een commutatieve groep t.o.v. de optelling.

(8.10) De nulrijen vormen een klasse.

Opgave 29. Bewijs dit.

De klasse der nulrijen noemen we voorlopig ω . Het is de nul der reële getallen:

$$(8.11) \quad \omega + \alpha = \alpha.$$

We noemen $\omega - \alpha$ ook $-\alpha$.

(8.12) Voor een fundamentealrij $\{a_n\}$ geldt één en slechts één van de volgende drie mogelijkheden:

1e. $\{a_n\}$ is een nulrij;

2e. er is een rationaal getal $d > 0$ en een natuurlijk getal N zodat voor $n > N$ geldt $a_n \geq d$;

3e. er is een rationaal getal $d' > 0$ en een natuurlijk getal N' zodat voor $n > N'$ geldt $a_n \leq -d'$.

Bewijs: Als $\{a_n\}$ geen nulrij is, is er een $\epsilon_1 > 0$, zodat bij iedere N een $n > N$ te vinden is met $|a_n| \geq \epsilon_1$. Omdat $\{a_n\}$ een fundamentealrij is, is er een N_1 zodat voor alle $m > N_1$, $n > N_1$ geldt $|a_m - a_n| < \frac{\epsilon_1}{2}$. Kies een vaste $n > N_1$ zodat $|a_n| \geq \epsilon_1$. Als dan $a_n \geq \epsilon_1$ is, is $a_m - a_n > -\frac{\epsilon_1}{2}$, $a_m > a_n - \frac{\epsilon_1}{2} \geq \epsilon_1 - \frac{\epsilon_1}{2} = \frac{\epsilon_1}{2}$, dus de rij verkeert in geval 2e met $d = \frac{\epsilon_1}{2}$ en $N = N_1$. Als $a_n \leq -\epsilon_1$, dan is $a_m - a_n < \frac{\epsilon_1}{2}$, $a_m < a_n + \frac{\epsilon_1}{2} \leq -\epsilon_1 + \frac{\epsilon_1}{2} = -\frac{\epsilon_1}{2}$, dus de rij verkeert in geval 3e met $d' = \frac{\epsilon_1}{2}$ en $N' = N_1$. Een fundamentealrij verkeert dus in minstens een van de drie gevallen. Als een rij tegelijkertijd in geval 1e en geval 2e zou verkeren, was er een N_2 zodat voor $n > N_2$ gold $|a_n| < d$. Voor $n = \max(N_2, N) + 1$ gold dan $a_n < d$ en $a_n \geq d$, hetgeen een tegenspraak geeft. Dat 1e en 3e ^{niet} tegelijkertijd vervuld kunnen zijn, bewijst men op analoge wijze. Als 2e. en 3e. tegelijkertijd vervuld zouden zijn, zou voor $n = \max(N, N') + 1$ gelden $a_n \geq d > 0 > -d' \geq a_n$, hetgeen een tegenspraak geeft.

(8.13) Twee aequivalente fundamenteaalrijen verkeren in hetzelfde geval van stelling (8.12).

Bewijs: Voor geval 1e is dat al in (8.10) aangetoond. Stel $\{a_n\} \sim \{a'_n\}$, $\{a_n\}$ in geval 2e., $\{a'_n\}$ in geval 3e. Noem $d_1 = \min(d, d')$ (d.w.z. d_1 is de kleinste van d en d'). Dan is er, omdat $\{a_n - a'_n\}$ een nulrij is, een N_1 zodat voor $n > N_1$ geldt $|a_n - a'_n| < d_1$. Voor $n = \max(N, N', N_1) + 1$ is $a_n > 0$, $a'_n < 0$, dus $a_n - a'_n > 0$. Dan is $d_1 > |a_n - a'_n| = a_n - a'_n \geq d + d' \geq d_1 + d_1 > d_1$, hetgeen een tegenspraak geeft.

Uit (8.13) volgt, dat de gevalonderscheiding van (8.12) ook een gevalonderscheiding voor reële getallen oplevert. Het is dus gerechtvaardigd het volgende te definiëren:

$\alpha > \omega$, als voor $\{a_n\} \in \alpha$ geldt, dat $\{a_n\}$ in geval 2e van (8.12) verkeert
 $\alpha < \omega$, als voor $\{a_n\} \in \alpha$ geldt, dat $\{a_n\}$ in geval 3e van (8.12) verkeert
 $\alpha > \beta$, als $\alpha - \beta > \omega$.

(8.14) Tussen twee reële getallen α en β bestaat één en slechts één van de relaties $\alpha = \beta$, $\alpha < \beta$, $\alpha > \beta$.

Dit volgt nu makkelijk uit (8.12), (8.13) en de definities van ω en $<$.

(8.15) Uit $\alpha < \beta$ en $\beta < \gamma$ volgt $\alpha < \gamma$.

Dit volgt uit het makkelijk te bewijzen feit, dat uit $\sigma > \omega$ en $\tau > \omega$ volgt $\sigma + \tau > \omega$.

(8.16) Uit $\alpha < \beta$ volgt $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$.

We definiëren nu het product van twee fundamenteaalrijen als volgt:

$$\{a_n\} \{b_n\} = \{a_n b_n\}.$$

(8.17) Als $\{a_n\}$ en $\{b_n\}$ fundamenteaalrijen zijn, dan ook $\{a_n b_n\}$.

Bewijs: Wegens (7.4) is er een C_1 zodat $|a_n| \leq C_1$ voor alle n en een C_2 zodat $|b_n| \leq C_2$ voor alle n . Nu is $|a_n b_n - a_m b_m| = |a_n b_n - a_n b_m + a_n b_m - a_m b_m| \leq |a_n| |b_n - b_m| + |a_n - a_m| |b_m| \leq C_1 |b_n - b_m| + C_2 |a_n - a_m|$. Neem nu een willekeurige $\epsilon > 0$, dan is daarbij een N_1 , zodat voor $n > N_1$, $m > N_1$ geldt $|a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2C_2}$ en een N_2 , zodat voor $n > N_2$, $m > N_2$ geldt $|b_n - b_m| < \frac{\epsilon}{2C_1}$. Neem $N = \max(N_1, N_2)$; voor $n > N$, $m > N$ geldt dan $C_1 |b_n - b_m| + C_2 |a_n - a_m| < C_1 \frac{\epsilon}{2C_1} + C_2 \frac{\epsilon}{2C_2} = \epsilon$, dus $|a_n b_n - a_m b_m| < \epsilon$.

(8.18) Uit $\{a_n\} \sim \{a'_n\}$ en $\{b_n\} \sim \{b'_n\}$ volgt $\{a_n b_n\} \sim \{a'_n b'_n\}$.

Bewijs: $|a_n| \leq C_1$, $|b'_n| \leq C_2$ voor alle n . Dus $|a_n b_n - a'_n b'_n| = |a_n b_n - a_n b'_n + a_n b'_n - a'_n b'_n| \leq |a_n| |b_n - b'_n| + |a_n - a'_n| |b'_n| \leq C_1 |b_n - b'_n| + C_2 |a_n - a'_n|$.

Omdat $\{a_n - a'_n\}$ en $\{b_n - b'_n\}$ nulrijen zijn, is er bij iedere $\epsilon > 0$ een N_1 , zodat voor $n > N_1$ geldt $|a_n - a'_n| < \frac{\epsilon}{2C_2}$ en een N_2 , zodat voor $n > N_2$ geldt $|b_n - b'_n| < \frac{\epsilon}{2C_1}$. Voor $n > \max(N_1, N_2)$ geldt

dus $C_1 |b_n - b'_n| + C_2 |a_n - a'_n| < C_1 \frac{e}{2C_1} + C_2 \frac{e}{2C_2} = e$, dus
 $|a_n b_n - a'_n b'_n| < e$.

Op grond van (8.17) en (8.18) is het geoorloofd het product van twee reële getallen representantsgewijze te definiëren met behulp van bovenstaande definitie van het product van twee fundamentealrijen.

$$(8.19) \quad \alpha \beta = \beta \alpha.$$

$$(8.20) \quad (\alpha \beta)_\gamma = \alpha (\beta_\gamma).$$

$$(8.21) \quad \alpha (\beta + \gamma) = \alpha \beta + \alpha \gamma.$$

Dit volgt makkelijk uit de overeenkomstige stellingen voor rationale getallen.

$$(8.22) \text{ Uit } \alpha < \beta \text{ en } \gamma > \omega \text{ volgt } \alpha \gamma < \beta \gamma.$$

Dit volgt uit het makkelijk te bewijzen feit, dat uit $\sigma > \omega$ en $\tau > \omega$ volgt $\sigma \tau > \omega$.

$$(8.23) \quad \alpha \omega = \omega.$$

Opgave 30. Bewijs (8.23) (gebruik hierbij (7.4)).

$$(8.24) \text{ Uit } \alpha \beta = \omega \text{ en } \alpha \neq \omega \text{ volgt } \beta = \omega.$$

Bewijs. Neem $\{a_n\} \in \alpha$, $\{b_n\} \in \beta$. Omdat $\alpha \neq \omega$, verkeert $\{a_n\}$ in geval 2° of 3° van (8.12). In ieder geval is er dus een $d > 0$ en een N_1 , zodat voor $n > N_1$ geldt $|a_n| \geq d$. Omdat $\{a_n b_n\}$ een nulrij is, is er bij iedere $e > 0$ een N_2 zodat voor $n > N_2$ geldt $|a_n b_n| < ed$. Voor $n > \max(N_1, N_2)$ is dan $|b_n| = \frac{|b_n| d}{d} \leq \frac{|b_n| |a_n|}{d} = \frac{|b_n a_n|}{d} < \frac{ed}{d} = e$.

(8.25) Als $\{a_n\}$ een fundamentealrij is en $\{b_n\}$ een rij, waarvoor geldt $b_n \neq a_n$ voor eindig veel n en $b_n = a_n$ voor de andere n , dan is $\{b_n\}$ een met $\{a_n\}$ aequivalente fundamentealrij. (Men zegt dan, dat $\{b_n\}$ uit $\{a_n\}$ ontstaat door eindig veel termen te veranderen).

Bewijs. Als $b_n = a_n$ voor alle n is er niets te bewijzen. Als er een n bestaat, waarvoor $b_n \neq a_n$, dan is er ook een grootste N_1 , waarvoor $b_n \neq a_n$ is. Voor $n > N_1$ geldt dan $a_n = b_n$. Het is dan onmiddellijk duidelijk, zowel dat $\{b_n\}$ een fundamentealrij is, als dat $\{b_n\} \sim \{a_n\}$: men kiese bij $e > 0$ in ieder geval $N > N_1$.

(8.26) Als $\alpha \neq \omega$ is, is er een $\{b_n\} \in \alpha$, zodat $b_n \neq 0$ voor allen n .

Bewijs. Neem een $\{a_n\} \in \alpha$. Volgens (8.12) is $a_n = 0$ voor eindig veel n . Definieer $\{b_n\}$ door: $b_n = 1$ als $a_n = 0$ en $b_n = a_n$ als $a_n \neq 0$, dan is volgens (8.25) $\{b_n\} \sim \{a_n\}$, dus $\{b_n\} \in \alpha$ en verder is $b_n \neq 0$ voor alle n .

We definiëren nu het quotiënt van twee fundamentealrijen $\{a_n\}$ en $\{b_n\}$, waarvan $\{a_n\}$ geen nulrij is en $a_n \neq 0$ voor alle n , als volgt:

$$\frac{\{b_n\}}{\{a_n\}} = \left\{ \frac{b_n}{a_n} \right\}.$$

(8.27) Als $\{a_n\}$ en $\{b_n\}$ fundamenteaalrijen zijn, $\{a_n\}$ geen nulrij is en $a_n \neq 0$ voor alle n , is $\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\}$ een fundamenteaalrij.

Bewijs:

$$\left|\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_m}{a_m}\right| = \left|\frac{b_n a_m - a_n b_m}{a_n a_m}\right| = \left|\frac{b_n a_m - b_n a_n + b_n a_n - b_m a_n}{a_n a_m}\right| \leq$$

$$\leq \frac{|b_n| |a_n - a_m|}{|a_n| |a_m|} + \frac{|b_n - b_m|}{|a_m|}.$$

Nu is $|b_n| \leq C$ voor alle n . Omdat $\{a_n\}$ geen nulrij is, is er een $d > 0$ en een N_1 , zodat voor $n > N_1$ geldt $|a_n| \geq d$. Nu is bij iedere $\epsilon > 0$ een N_2 zodat voor $m > N_2$, $n > N_2$ geldt $|a_n - a_m| < \frac{\epsilon d^2}{2C}$ en een N_3 zodat voor $m > N_3$, $n > N_3$ geldt $|b_n - b_m| < \frac{\epsilon d}{2}$.

Noem $N = \max(N_1, N_2, N_3)$; voor $m > N$, $n > N$ geldt dan

$$\frac{|b_n| |a_n - a_m|}{|a_n| |a_m|} + \frac{|b_n - b_m|}{|a_m|} < \frac{C \frac{\epsilon d^2}{2C}}{d^2} + \frac{\frac{\epsilon d}{2}}{d} = \epsilon, \text{ dus } \left|\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_m}{a_m}\right| < \epsilon.$$

(8.28) Als $\{a_n\} \sim \{a'_n\}$, $\{b_n\} \sim \{b'_n\}$, $\{a_n\}$ geen nulrij is, $a_n \neq 0$ voor alle n en $a'_n \neq 0$ voor alle n , is $\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\} \sim \left\{\frac{b'_n}{a'_n}\right\}$.

Bewijs: Analooog als boven is $\left|\frac{b_n}{a_n} - \frac{b'_n}{a'_n}\right| \leq \frac{|b_n| |a_n - a'_n|}{|a_n| |a'_n|} + \frac{|b_n - b'_n|}{|a'_n|}.$

Nu is $|b_n| \leq C$ voor alle n .

Omdat $\{a_n\}$ geen nulrij is, is er een $d_1 > 0$ en een N_1 , zodat voor $n > N_1$ geldt $|a_n| \geq d_1$. Omdat $\{a_n\}$ geen nulrij is en $\{a_n\} \sim \{a'_n\}$, is $\{a'_n\}$ geen nulrij en dus is er een $d_2 > 0$ en een N_2 , zodat voor $n > N_2$ geldt $|a'_n| \geq d_2$. Omdat $\{a_n - a'_n\}$ en $\{b_n - b'_n\}$ nulrijen zijn, is er bij iedere $\epsilon > 0$ een N_3 zodat voor $n > N_3$ geldt

$$|a_n - a'_n| < \frac{\epsilon d_1 d_2}{2C} \text{ en een } N_4, \text{ zodat voor } n > N_4 \text{ geldt } |b_n - b'_n| < \frac{\epsilon d_2}{2}.$$

Voor $n > \max(N_1, N_2, N_3, N_4)$ geldt dan

$$\frac{|b_n| |a_n - a'_n|}{|a_n| |a'_n|} + \frac{|b_n - b'_n|}{|a'_n|} < \frac{C \frac{\epsilon d_1 d_2}{2C}}{d_1 d_2} + \frac{\frac{\epsilon d_2}{2}}{d_2} = \epsilon.$$

Op grond van het bovenstaande kunnen we nu het quotiënt $\frac{\beta}{\alpha}$ van twee reële getallen met $\alpha \neq 0$ representantsgewijze definiëren, omdat uit (8.26) volgt dat α een representant $\{a_n\}$ bevat, waarvoor geldt $a_n \neq 0$ voor alle n .

$$(8.29) \quad \alpha \frac{\beta}{\alpha} = \beta.$$

De reële getallen vormen dus een lichaam.

De reële getallen, die een constante fundamenteaalrij $\{a_n\}$ bevatten stemmen wat hun gedrag t.o.v. optelling, aftrekking, vermenigvuldiging, deling en ordening betreft geheel overeen met

de overeenkomstige rationale getallen a. Verder bevat ieder reëel getal hoogstens één constante fundamenteaalrij.

Opgave 31. Ga dit na.

We kunnen dus zonder bezwaar de reële getallen, die een constante fundamenteaalrij bevatten uit de verzameling der reële getallen verwijderen en er de overeenkomstige rationale getallen voor in de plaats stellen. De reële getallen vormen dan een uitbreiding van de rationale getallen. ω correspondeert met 0, want $\{0\}$ is een nulrij.

Evenals voor rationale getallen definiëren we:

$$|\alpha| = \alpha \quad \text{als} \quad \alpha \geq 0,$$

$$|\alpha| = -\alpha \quad \text{als} \quad \alpha < 0.$$

$$(8.30) \quad |\alpha| \geq 0 \text{ en dan en slechts dan } = 0 \text{ als } \alpha = 0.$$

$$(8.31) \quad |\alpha\beta| = |\alpha||\beta|.$$

$$(8.32) \quad |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|.$$

Dit wordt op precies dezelfde wijze bewezen als bij rationale getallen.

We kunnen nu ook rijen reële getallen beschouwen en definiëren:

Een rij α_n heet convergent met limiet α , als bij ieder positief reëel getal ε een natuurlijk getal N te vinden is, zodat voor alle natuurlijke getallen n met $n > N$ geldt $|\alpha - \alpha_n| < \varepsilon$.

Een rij α_n heet een fundamenteaalrij, als bij ieder positief reëel getal ε een natuurlijk getal N te vinden is, zodat voor alle natuurlijke getallen m en n met $m > N$ en $n > N$ geldt $|\alpha_m - \alpha_n| < \varepsilon$.

Voor rationale getallen stemmen deze definities schijnbaar niet overeen met de vroegere, omdat hier een reële ε in de definitie staat i.p.v. een rationale e . Om aan te tonen, dat dit schijn is, bewijzen we eerst:

(8.33) Bij ieder reëelgetal $\varepsilon > 0$ is een rationaal getal e te vinden, zodat $\varepsilon > e > 0$.

Bewijs. Kies $\{e_n\} \in \varepsilon$. Er is een $d > 0$ en een N te vinden, zodat voor $n > N$ geldt $e_n \geq d$, dus $e_n - \frac{1}{2}d \geq \frac{1}{2}d$. Hieruit volgt $\varepsilon - \frac{1}{2}d > 0$. Kiest men dus $e = \frac{1}{2}d$, dan is $\varepsilon > e > 0$.

(8.34) Als een rij rationale getallen convergent is (resp. een fundamenteaalrij is) volgens de e -definitie, dan ook volgens de ε -definitie en omgekeerd.

Opgave 32. Bewijs (8.34).

(8.35) Als $\{a_n\} \in \alpha$, dan is $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$.

Bewijs: Neem een willekeurige $\varepsilon > 0$ en kies hierbij een e met $\varepsilon > e > 0$. Er is dan een N zodat voor $m > N$, $n > N$ geldt $|a_m - a_n| < \frac{e}{2}$. Neem nu een willekeurige, maar vaste m met $m > N$, en beschouw $\beta = \alpha - a_m$, dan geldt voor $b_n = a_n - a_m$, dat $\{b_n\} \in \beta$. Voor

de overeenkomstige rationale getallen a. Verder bevat ieder reëel getal hoogstens één constante fundamenteaalrij.

Opgave 31. Ga dit na.

We kunnen dus zonder bezwaar de reële getallen, die een constante fundamenteaalrij bevatten uit de verzameling der reële getallen verwijderen en er de overeenkomstige rationale getallen voor in de plaats stellen. De reële getallen vormen dan een uitbreiding van de rationale getallen. ω correspondeert met 0, want $\{0\}$ is een nulrij.

Evenals voor rationale getallen definiëren we:

$$|\alpha| = \alpha \quad \text{als} \quad \alpha \geq 0,$$

$$|\alpha| = -\alpha \quad \text{als} \quad \alpha < 0.$$

(8.30) $|\alpha| \geq 0$ en dan en slechts dan $= 0$ als $\alpha = 0$.

(8.31) $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$.

(8.32) $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$.

Dit wordt op precies dezelfde wijze bewezen als bij rationale getallen.

We kunnen nu ook rijen reële getallen beschouwen en definiëren:

Een rij α_n heet convergent met limiet α , als bij ieder positief reëel getal ϵ een natuurlijk getal N te vinden is, zodat voor alle natuurlijke getallen n met $n > N$ geldt $|\alpha - \alpha_n| < \epsilon$.

Een rij α_n heet een fundamenteaalrij, als bij ieder positief reëel getal ϵ een natuurlijk getal N te vinden is, zodat voor alle natuurlijke getallen m en n met $m > N$ en $n > N$ geldt $|\alpha_m - \alpha_n| < \epsilon$.

Voor rationale getallen stemmen deze definities schijnbaar niet overeen met de vroegere, omdat hier een reële ϵ in de definitie staat i.p.v. een rationale e. Om aan te tonen, dat dit schijn is, bewijzen we eerst:

(8.33) Bij ieder reëelgetal $\epsilon > 0$ is een rationaal getal e te vinden, zodat $\epsilon > e > 0$.

Bewijs. Kies $\{e_n\} \in \epsilon$. Er is een $d > 0$ en een N te vinden, zodat voor $n > N$ geldt $e_n \geq d$, dus $e_n - \frac{1}{2}d \geq \frac{1}{2}d$. Hieruit volgt $\epsilon - \frac{1}{2}d > 0$. Kiest men dus $e = \frac{1}{2}d$, dan is $\epsilon > e > 0$.

(8.34) Als een rij rationale getallen convergent is (resp. een fundamenteaalrij is) volgens de e-definitie, dan ook volgens de ϵ -definitie en omgekeerd.

Opgave 32. Bewijs (8.34).

(8.35) Als $\{a_n\} \in \alpha$, dan is $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$.

Bewijs: Neem een willekeurige $\epsilon > 0$ en kies hierbij een e met $\epsilon > e > 0$. Er is dan een N zodat voor $m > N$, $n > N$ geldt $|a_m - a_n| < \frac{\epsilon}{2}$. Neem nu een willekeurige, maar vaste m met $m > N$, en beschouw $\beta = \alpha - a_m$, dan geldt voor $b_n = a_n - a_m$, dat $\{b_n\} \in \beta$. Voor

$\xi \geq \delta$ voor alle $\xi \in V$. Begrensd als er een κ bestaat, zodat $|\xi| \leq \kappa$ voor alle $\xi \in V$.

(8.38) Een verzameling V reële getallen, die naar boven en naar beneden begrensd is, is begrensd. Een verzameling V reële getallen, die begrensd is, is naar boven en naar beneden begrensd.

Bewijs: Kies $\kappa = \max(\gamma, -\delta)$; voor $\xi \in V$ en $\xi \geq 0$ geldt dan $|\xi| = \xi \leq \gamma \leq \kappa$, voor $\xi \in V$ en $\xi < 0$ geldt $|\xi| = -\xi \leq -\delta \leq \kappa$. Het omgekeerde is triviaal.

Een reëel getal α heet een bovengrens van een naar boven begrensde verzameling V reële getallen, als voor alle $\xi \in V$ geldt $\xi \leq \alpha$.

Een reëel getal α heet de bovenste grens (of het supremum) van een naar boven begrensde verzameling reële getallen als α een bovengrens is, maar geen enkel kleiner reëel getal bovengrens is, m.a.w. als α de kleinste bovengrens is (Het is duidelijk, dat hoogstens één reëelgetal bovenste grens van een verzameling kan zijn, zodat het bepaalde lidwoord in de definitie gerechtvaardigd is).

Analoog definieert men benedengrens en benedenste grens (infimum). De bovenste grens van V wordt aangeduid met $\sup V$, de benedenste grens met $\inf V$. We weten nog niets over het bestaan van deze getallen. Hierover zal de volgende stelling ons inlichten.

(8.39) (Stelling van de bovenste grens) Iedere niet-lege naar boven begrensde verzameling V reële getallen heeft een bovenste grens.

Bewijs: Omdat V naar boven begrensd is, bestaat er een bovengrens σ . Kies een geheel getal $M \geq \sigma$, dan is M ook een bovengrens van V . Omdat V niet leeg is, is er een $\mu \in V$. Kies een geheel getal $m < \mu$, dan is $m < \mu \leq M$. Neem nu een willekeurig natuurlijk getal n en beschouw de verzameling bestaande uit de gehele getallen k die voldoen aan $m2^n \leq k \leq M2^n$. Omdat $m2^n < M2^n$, is deze verzameling niet leeg; verder is zij begrensd en dus eindig. Voor deze k geldt nu $m \leq \frac{k}{2^n} \leq M$. De verzameling van deze breuken $\frac{k}{2^n}$ bevat zeker een bovengrens van V , nl. $\frac{M2^n}{2^n} = M$, en daar de verzameling eindig is, bevat ze ook een kleinste element, dat bovengrens van V is. Noem dat element $a_n = \frac{k_n}{2^n}$, dan is $a_n - \frac{1}{2^n} = \frac{k_n - 1}{2^n}$ geen bovengrens. We doen dit voor ieder natuurlijk getal; als $h \geq n$, is $a_h \leq a_n$, want $a_h = \frac{k_h}{2^h} = \frac{k_n 2^{h-n}}{2^h 2^{h-n}} = \frac{k_n 2^{h-n}}{2^h}$ komt voor in de verzameling breuken bij h en is bovengrens. Verder is a_h wel en $a_n - \frac{1}{2^n}$ geen bovengrens. Dus voor

$h \geq n$ is $a_n - \frac{1}{2^n} < a_h \leq a_n$, $0 \leq a_n - a_h < \frac{1}{2^n}$, $|a_n - a_h| < \frac{1}{2^n}$. We bewijzen nu dat $\{a_n\}$ een fundamenteaalrij is. Bij iedere $\varepsilon > 0$ is een N te vinden zodat voor $n > N$ geldt $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ (zie opgave 26). Dus voor $h > N$, $n > N$ geldt $|a_n - a_h| < \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ als $h \geq n$ en $|a_n - a_h| < \frac{1}{2^h} < \varepsilon$ als $h < n$. Volgens de stelling van Cauchy is dus $\{a_n\}$ convergent: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$. We bewijzen dat α de gezochte bovenste grens is. Stel eerst dat α geen bovengrens is, dan is er een $x \in V$, zodat $\alpha < x$, dus $x - \alpha > 0$. Er is een p te vinden zodat $|x - a_p| < x - \alpha$, dus $a_p - \alpha < x - \alpha$, $a_p < x$, in strijd met het feit, dat a_p bovengrens is. Dus α is een bovengrens. Stel nu dat er een kleinere bovengrens $\beta < \alpha$ is. Dan is $\alpha - \beta > 0$, dus is er een q zodat $\frac{1}{2^q} < \alpha - \beta$. Daar $a_q - \frac{1}{2^q}$ geen bovengrens is, is er een $\lambda \in V$, zodat $a_q - \frac{1}{2^q} < \lambda \leq \beta$. Hieruit volgt $a_q < \alpha$, dus $\alpha - a_q > 0$. Er is een M , zodat voor $n > M$ geldt $|\alpha - a_n| < \alpha - a_q$, dus zeker $\alpha - a_n < \alpha - a_q$, $-a_n < -a_q$, $a_q < a_n$. Neemt men nu $n = \max(M, q) + 1$; wegens $n > M$ is dan $a_q < a_n$, maar wegens $n > q$ is $a_q > a_n$, hetgeen een tegenspraak geeft. Dus is α de bovenste grens van V , waarmee de stelling bewezen is.

Uiteraard is ^{er} ook een overeenkomstige stelling van de benedenste grens. Men verwarre verder niet de bovenste grens met het grootste element (het maximum: $\max V$). Zo heeft de verzameling der reële getallen < 1 als bovenste grens 1, maar geen maximum. Tussen beide begrippen bestaat het volgende verband:

(8.40) Als de bovenste grens van een naar boven begrensde verzameling V reële getallen tot V behoort is ze het grootste ^{element} van V . Als de verzameling V reële getallen een grootste element bezit, is dit tevens de bovenste grens. (Als $\sup V$ en $\max V$ dus beide bestaan, geldt $\sup V = \max V$).

Opgave 33. Bewijs (8.40).

We noemen een rij reële getallen $\{\alpha_m\}$ monotoon niet-dalend (of isotoon), als uit $m < n$ volgt $\alpha_m \leq \alpha_n$, monotoon niet stijgend (of antitoon), als uit $m < n$ volgt $\alpha_m \geq \alpha_n$, monotoon stijgend (of streng isotoon), als uit $m < n$ volgt $\alpha_m < \alpha_n$, monotoon dalend (of streng antitoon), als uit $m < n$ volgt $\alpha_m > \alpha_n$. In alle vier de gevallen heet de rij monotoon, in de laatste twee gevallen streng monotoon.

(8.41) Een rij $\{\alpha_m\}$ is isotoon als $\alpha_m \leq \alpha_{m+1}$ voor alle m , en analoog voor de andere gevallen.

Opgave 34. Bewijs (8.41).

(8.42) Een monotone begrensde rij is convergent. Als de rij isotoon (resp. antitoon) is, is de limiet $\geq$ (resp. $\leq$) een willekeurig element van de rij; als de rij streng isotoon (resp. streng antitoon) is, is de limiet $>$ (resp. $<$) een willekeurig element van de rij.

Bewijs: We geven het bewijs voor een isotone rij; voor een antitone rij gaat het bewijs geheel analoog. Een isotone rij is automatisch naar

beneden begrensd, want $\alpha_n \geq \alpha_1$ voor alle n . Omdat zij nu ook naar boven begrensd is, is er een γ , zodat $\alpha_n \leq \gamma$ voor alle n . We beschouwen nu de verzameling der α_n ; deze is niet leeg en naar boven begrensd en bezit dus een bovenste grens α . We bewijzen nu dat $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$. Neem een $\varepsilon > 0$, dan is $\alpha - \varepsilon$ geen bovenste grens, dus is er een N , zodat $\alpha - \varepsilon < \alpha_N \leq \alpha$. Voor $n > N$ is $\alpha_n \geq \alpha_N$, maar ook $\alpha_n \leq \alpha$, dus $\alpha - \varepsilon < \alpha_n \leq \alpha$, dus $0 \leq \alpha - \alpha_n < \varepsilon$, dus $|\alpha - \alpha_n| < \varepsilon$, dus $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$. Tevens is blijkbaar $\alpha \geq \alpha_m$ voor alle m . Als de rij streng isotoon is geeft de veronderstelling $\alpha = \alpha_m$ voor een of andere m direct een tegenspraak met $\alpha_m < \alpha_{m+1}$ en $\alpha_m \leq \alpha$.

(8.43) Bij ieder reëel getal $\alpha \geq 0$ is één en slechts één reëel getal $\beta \geq 0$ te vinden zodat $\beta^2 = \alpha$. We noemen dit getal $\beta = \sqrt{\alpha}$.

Bewijs: Eerst tonen we aan, dat er niet meer dan één kan zijn. Stel $\beta^2 = \alpha$, $\beta_1^2 = \alpha$, $0 \leq \beta < \beta_1$, dan is $\beta^2 < \beta\beta_1 < \beta_1^2$, hetgeen een tegenspraak geeft. Voor $\alpha = 0$ voldoet $\beta = 0$, voor $\alpha = 1$ voldoet $\beta = 1$. Verder kunnen we ons beperken tot α met $0 < \alpha < 1$, want als het daarvoor bewezen is en $\alpha > 1$, dan is $\frac{1}{\alpha} < 1$ en er bestaat een γ zodat $\gamma^2 = \frac{1}{\alpha}$. Stelt men dan $\beta = \frac{1}{\gamma}$, dan is $\beta^2 = \frac{1}{\gamma^2} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha}} = \alpha$. Nu nog het geval $0 < \alpha < 1$. Beschouw de verzameling der reële getallen ξ , die > 0 zijn en waarvoor geldt $\xi^2 \leq \alpha$. Deze verzameling is niet leeg, want $\alpha^2 < \alpha$, dus α behoort er toe, en naar boven begrensd, want 1 is een bovengrens (immers uit $\eta > 1$ volgt $\eta^2 > \eta > 1 > \alpha$). De verzameling heeft dus een bovenste grens β . We bewijzen, dat $\beta^2 = \alpha$. Stel $\beta^2 > \alpha$ (resp. $\beta^2 < \alpha$), dan geldt voor $\delta = \frac{\alpha + \beta}{1 + \beta}$, dat $\delta < \beta$ (resp. $\delta > \beta$) en $\delta^2 > \alpha$ (resp. $\delta^2 < \alpha$).

Opgave 35. Bewijs dit laatste (Redeneer om het bewijs te vinden eerst van achter naar voren, d.w.z. begin bij het te bewijzen).

Als nu $\beta^2 > \alpha$ is, is, wegens $\delta < \beta$, δ geen bovengrens, dus is er een ξ met $\xi^2 \leq \alpha$ en $\xi > \delta$, maar $\xi^2 > \xi\delta > \delta^2 > \alpha$, hetgeen een tegenspraak geeft. Als $\beta^2 < \alpha$ is, is $\delta > \beta$ en $\delta^2 < \alpha$ direct in strijd met het feit dat β bovengrens is. Dus $\beta^2 = \alpha$.

Uit (8.43) en (7.1.) volgt nu, dat $\sqrt{2}$ niet rationaal is. We noemen reële getallen, die niet rationaal zijn irrationaal. We weten dus nu dat de rationale getallen een echte deelverzameling van de reële getallen vormen; hiermee is de invoering van de reële getallen pas ten volle gerechtvaardigd. Anders uitgedrukt: nu is bewezen, dat niet iedere fundamenteaalrij rationale getallen in het gebied der rationale getallen convergeert, b.v. een fundamenteaalrij die tot de klasse van $\sqrt{2}$ behoort (d.w.z. een fundamenteaalrij die naar $\sqrt{2}$ convergeert) convergeert niet naar een rationaal getal.

(8.44) Tussen twee verschillende reële getallen ligt een irrationaal getal, dat van beide verschilt.

Bewijs: Stel $\alpha > \beta$, dan is $\alpha - \sqrt{2} > \beta - \sqrt{2}$. Er is volgens (8.37) een rationaal getal c , zodat $\alpha - \sqrt{2} > c > \beta - \sqrt{2}$, dus $\alpha > c + \sqrt{2} > \beta$. Nu is $c + \sqrt{2}$ irrationaal, want als het rationaal was, was $(c + \sqrt{2}) - c = \sqrt{2}$ ook rationaal.

(8.45) Als de verzameling der reële getallen in twee klassen L en R verdeeld wordt, zodat het volgende geldt:

- 1° ieder reëel getal ligt in één en slechts één van beide klassen,
- 2° L en R zijn geen van beide leeg,
- 3° uit $\xi \in L$ en $\eta \in R$ volgt $\xi < \eta$,

dan heeft L een grootste of R een kleinste element en niet beide (snede van Dedekind).

Bewijs: Dat niet beide kan is duidelijk: stel α het grootste element van L en β het kleinste element van R, dan is $\alpha < \beta$, dus $\alpha < \frac{\alpha + \beta}{2} < \beta$. Zowel de veronderstelling $\frac{\alpha + \beta}{2} \in L$ als de veronderstelling $\frac{\alpha + \beta}{2} \in R$ leidt dan tot een tegenspraak. L is niet leeg en verder naar boven begrensd, omdat R niet leeg is en een element van R bovengrens van L is. Dus heeft L een bovenste grens α . Als $\alpha \in L$, is α het grootste element van L. Als $\alpha \notin L$, is $\alpha \in R$. Als er een $\eta \in R$ was, met $\eta < \alpha$, was η ook bovengrens van L, in strijd met het feit dat α bovenste grens van L is. Dus is α het kleinste element van R.

We hadden sneden rationale getallen ook voor de definitie van de reële getallen kunnen gebruiken.

Als $\alpha \leq \beta$, noemen we de verzameling der reële getallen ξ , die voldoen aan $\alpha \leq \xi \leq \beta$ het (gesloten) interval $[\alpha, \beta]$. We noemen $\beta - \alpha$ de lengte van het interval.

(8.46) Als van een rij $[\alpha_n, \beta_n]$ intervallen geldt:

1° uit $n < m$ volgt $\alpha_n \leq \alpha_m$ en $\beta_n \geq \beta_m$ (we zeggen dan dat de intervallen in elkaar geschakeld zijn),

2° $\lim_{n \rightarrow \infty} (\beta_n - \alpha_n) = 0$ (de lengten convergeren naar nul),

dan is er één en slechts één reëel getal dat tot alle intervallen behoort (intervalschakeling).

Bewijs: $\{\alpha_n\}$ is een isotone begrensde rij ($\alpha_n \leq \beta_n \leq \beta_1$ voor allen), die dus convergent is: $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \gamma$ met $\gamma \geq \alpha_n$. Evenzo geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \delta$ met $\delta \leq \beta_n$. Stel nu $\gamma \neq \delta$, dan is $|\gamma - \delta| > 0$. Er is dan een N_1 , zodat voor $n > N_1$ geldt $|\delta - \beta_n| < \frac{1}{3} |\gamma - \delta|$, een N_2 zodat voor $n > N_2$ geldt $|\gamma - \alpha_n| < \frac{1}{3} |\gamma - \delta|$ en een N_3 zodat voor $n > N_3$ geldt $|\beta_n - \alpha_n| < \frac{1}{3} |\gamma - \delta|$. Voor $n = \max(N_1, N_2, N_3) + 1$ geldt dan

$|\gamma - \delta| \leq |\gamma - \alpha_n| + |\alpha_n - \beta_n| + |\beta_n - \delta| < |\gamma - \delta|$, wat een tegenspraak geeft. Dus $\gamma = \delta$ en $\alpha_n \leq \gamma \leq \beta_n$. Dus γ voldoet aan de eisen. Stel dat er een γ_1 was, die ook aan de eisen voldeed en $\gamma_1 \neq \gamma$. Als $\gamma_1 > \gamma$ dan $\gamma_1 - \gamma > 0$ dan is er een n waarvoor $\beta_n - \gamma < \gamma_1 - \gamma$ dus $\beta_n < \gamma_1$ hetgeen een tegenspraak geeft. $\gamma < \gamma$ geeft op analoge wijze een tegenspraak.

We hadden intervalschakelingen rationale getallen ook voor de definitie van de reële getallen kunnen gebruiken.

(8.47) (Stelling van G. Cantor): De verzameling der reële getallen is niet aftelbaar.

Bewijs: We tonen aan: als $\alpha < \beta$ is de verzameling der reële getallen uit het interval $[\alpha, \beta]$ niet aftelbaar. Stel dat ze wel aftelbaar waren, dan was er een ééneënduidige toevoeging ξ_n van de reële getallen van $[\alpha, \beta]$ aan de natuurlijke getallen. We gaan nu een intervalschakeling maken. We beschouwen de drie intervallen

$$\left[\alpha, \frac{2\alpha + \beta}{3} \right], \left[\frac{2\alpha + \beta}{3}, \frac{\alpha + 2\beta}{3} \right], \left[\frac{\alpha + 2\beta}{3}, \beta \right].$$

Ze hebben alle drie de lengte $\frac{\beta - \alpha}{3}$. Minstens één van de drie bevat het getal ξ_n , niet. Neem z.b. een als $[\alpha_n, \beta_n]$. Stel dat $[\alpha_n, \beta_n]$ gevonden is, dan passen we op $[\alpha_n, \beta_n]$ hetzelfde procédé toe als zoëven op $[\alpha, \beta]$ en kiezen als $[\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}]$ één van de drie intervallen, waar ξ_{n+1} niet in ligt. Het is dan makkelijk te bewijzen, dat $[\alpha_n, \beta_n]$ een in elkaar geschakelde rij intervallen vormen, dat voor alle n $[\alpha_n, \beta_n]$ ξ_n niet bevat en dat $[\alpha_n, \beta_n]$ de lengte $\frac{\beta - \alpha}{3^n}$ heeft. Maar $\frac{1}{3^n} < \frac{1}{2^n}$, dus $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n} = 0$, dus $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta - \alpha}{3^n} = 0$ (waarom?), dus convergeren de lengten naar nul. Er is dus volgens (8.46) een getal γ dat tot alle intervallen behoort: $\alpha_n \leq \gamma \leq \beta_n$ voor alle n . Maar $\alpha_1 \geq \alpha$, $\beta_1 \leq \beta$, dus $\alpha \leq \gamma \leq \beta$. Dus is er een m , waarvoor $\gamma = \xi_m$. Dit leidt echter tot een tegenspraak, want ξ_m ligt niet in $[\alpha_m, \beta_m]$ en γ wel.

We kunnen het bewijs nog iets aanschouwelijker maken door decimaalbreukontwikkelingen van de reële getallen te gebruiken. Een decimaalbreukontwikkeling is n.l. niets anders dan een intervalschakeling $13,672 \dots$ betekent het reële getal bepaald door de intervalschakeling $[13,6 ; 13,7]$, $[13,67 ; 13,68]$, $[13,672 ; 13,673]$ enz., met lengten $\frac{1}{10^n}$. Stel nu dat de reële getallen tussen 0 en 1 als volgt afgeteld waren:

$$\begin{array}{lcl} 1 & \longleftrightarrow & 0, a_{11} a_{12} a_{13} \dots \\ 2 & \longleftrightarrow & 0, a_{21} a_{22} a_{23} \dots \\ \dots & & \dots \\ n & \longleftrightarrow & 0, a_{n1} a_{n2} a_{n3} \dots a_{nn} \dots \end{array}$$

waarin a_{ik} steeds een van de cijfers $0, \dots, 9$ is. We passen nu de diagonaalmethode toe: we vormen $0, b_1 b_2 \dots$, waarbij steeds $b_n \neq a_{nn}$ is. Dit is weer een reëel getal tussen 0 en 1. Als het het nummer m heeft, geeft $b_m \neq a_{mm}$ een tegenspraak. Er treedt bij deze vorm van het bewijs nog een kleine complicatie op, doordat een reëel getal meer dan één decimaalbreukontwikkeling kan bezitten (b.v. $0,5000\dots = 0,4999\dots$). We gaan daar niet verder op in.

We hebben in (8.47) een nieuw bewijs voor het bestaan van irrationale getallen. Zelfs is de verzameling der irrationale getallen niet aftelbaar.

We laten nu de afspraak om rationale getallen met Latijnse en reële getallen met Griekse letters te schrijven vervallen.

Als a_n een rij reële getallen is, definiëren we $B\{a_n\}$ als de verzameling bestaande uit die en slechts die reële getallen x waarvoor geldt:

bij iedere $\varepsilon > 0$ is een N te vinden, zodat voor $n > N$ geldt $a_n - x < \varepsilon$.

Het is duidelijk, dat $B\{a_n\}$ de verzameling is van die reële getallen x waarvoor geldt: bij ieder reëel getal y , waarvoor $y > x$, is een N te vinden zodat voor $n > N$ geldt $a_n < y$. Verder is duidelijk dat als $x \in B\{a_n\}$

en $y > x$, dat $y \in B\{a_n\}$.

(8.48) Als $B\{a_n\}$ niet-leeg en naar beneden begrensd is, is $\inf B\{a_n\} \in B\{a_n\}$.

Bewijs: Noem $\inf B\{a_n\} = a$. Als $a \notin B\{a_n\}$, is er een $b > a$ zodat bij iedere N een $n > N$ te vinden is met $a_n \geq b$. Nu is b geen benedengrens van $B\{a_n\}$, dus is er een c waarvoor $c < b$ en $c \in B\{a_n\}$. Er is dus een N_1 zodat van alle $n > N_1$ geldt $a_n < b$. Dit is in strijd met het feit, dat er een $n > N$, is waarvoor $a_n \geq b$ is. Dus $a \in B\{a_n\}$.

We definiëren nu:

$\limsup a_n = +\infty$, als $B\{a_n\}$ leeg is,

$\limsup a_n = -\infty$, als $B\{a_n\}$ niet naar beneden begrensd is,

$\limsup a_n = \inf B\{a_n\}$, als $B\{a_n\}$ niet-leeg en naar beneden begrensd is.

Hierin zijn $+\infty$ en $-\infty$ louter symbolen, geen reële getallen. Er wordt niet mee gerekend. Wel definiëren we er ordeningsrelaties voor:

$+\infty > x$, voor alle reële x ,

$-\infty < x$, voor alle reële x ,

$-\infty < +\infty$.

Het is duidelijk dat hierbij de transitieve eigenschap van de ordening bewaard blijft.

(8.49) Bij ieder reëel getal x , waarvoor $x > \limsup a_n$, is een N te vinden zodat voor $n > N$ geldt $a_n < x$.

Dit volgt direct uit de definities en (8.48).

(8.50) Als a_n convergent is, geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup a_n$.

Bewijs: Noem $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Stel een reëel getal y , waarvoor $y < a$ en $y \in B\{a_n\}$. Dan is er een N_1 zodat voor $n > N_1$ geldt $a_n < \frac{y+a}{2}$ en een N_2 zodat voor $n > N_2$ geldt $|a - a_n| < \frac{a-y}{2}$, dus zeker $a - a_n < \frac{a-y}{2}$, of $a_n > \frac{a+y}{2}$. Voor $n = \max(N_1, N_2) + 1$ geeft dat een tegenspraak. Verder is $a \in B\{a_n\}$, dus a het kleinste element van $B\{a_n\}$, dus $a = \limsup a_n$.

(8.51) Als er een reëel getal C bestaat, zodat voor alle n geldt $a_n \leq C$ (resp. $a_n \geq C$), dan is $\limsup a_n \leq C$ (resp. $\limsup a_n \geq C$).

Opgave 36. Bewijs (8.51).

Op geheel analoge wijze definiëren we $\liminf a_n$, door uit te gaan van de verzameling $O\{a_n\}$ bestaande uit die en slechts die reële getallen x , waarvoor geldt: bij ieder reëel getal y , waarvoor $y < x$, is een N te vinden zodat voor $n > N$ geldt $a_n > y$. Dan is

$\liminf a_n = -\infty$, als $O\{a_n\}$ leeg is,

$\liminf a_n = +\infty$, als $O\{a_n\}$ niet naar boven begrensd is,

$\liminf a_n = \sup O\{a_n\}$, als $O\{a_n\}$ niet-leeg en naar boven begrensd is.

Voor $\liminf a_n$ gelden dan overeenkomstige stellingen als voor $\limsup a_n$.

(8.52) $\liminf a_n \leq \limsup a_n$.

(8.53) Als $\liminf a_n = \limsup a_n$ een reëel getal is (dus niet $+\infty$ of $-\infty$), dan is a_n convergent en $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf a_n = \limsup a_n$.

Opgave 37. Bewijs (8.52) en (8.53).

Als $\limsup a_n = \liminf a_n = +\infty$, schrijven we $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, evenzo als $\limsup a_n = \liminf a_n = -\infty$, schrijven we $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$. In die gevallen zeggen we echter niet, dat a_n convergent is! Men noemt a_n dan wel eigenlijk divergent.

Opgave 38. Formuleer een voorwaarde voor a_n , opdat $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

Opgave 39. Bewijs, dat als $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, dan $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$, en als $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$, dan $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ (Hierbij is verondersteld $a_n \neq 0$ voor alle n).

Opgave 40. Bepaal $\limsup$ en $\liminf$ van de volgende rijen:

1° $a_n = n$; 2° $a_n = -n$; 3° $a_{2n-1} = 1$, $a_{2n} = 2^{-n}$; 4° a_n is een of andere aftelling van de rationale getallen tussen 0 en 1.

99. Complexe getallen.

Voor de invoering van de complexe getallen verwijzen we naar de cursus algebra.

Een complex getal α is te schrijven in de vorm $\alpha = a + bi$, met a en b reëel. a heet het reële deel van α ($\Re \alpha$ of $\operatorname{Re} \alpha$), het imaginaire deel van α ($\Im \alpha$ of $\operatorname{Im} \alpha$). $i^2 = -1$. De complexe getallen vormen een lichaam. Als $\alpha = a + bi$ (a en b reëel), dan heet het getal $\bar{\alpha} = a - bi$ het toegevoegd complexe (of geconjugeerd complexe) van α . Dan is $\alpha \bar{\alpha} = a^2 + b^2$ een reëel getal ≥ 0 en dan en slechts dan $= 0$ als $\alpha = 0$. Het is onmogelijk, de complexe getallen zo te ordenen, dat de gewone ordeningseigenschappen te voorschijn komen. Als het wel kon, was $a^2 > 0$ voor alle $a \neq 0$, dus $i = -1 > 0$ en $1^2 = 1 > 0$, maar dan ook $0 = 1 + (-1) > 0$ hetgeen een tegenspraak geeft. We definiëren $|a| = \sqrt{a \bar{a}}$. Omdat $a \bar{a}$ reëel en ≥ 0 is, is dat een geoorloofde definitie; verder stemt het voor a reëel overeen met het vroeger gedefinieerde. (9.1) $\bar{\bar{a}} = a$.

(9.2) $\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}$, $\overline{a-b} = \bar{a} - \bar{b}$, $\overline{ab} = \bar{a}\bar{b}$, $\overline{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\bar{a}}{\bar{b}}$.

(9.3) $2\Re a = a + \bar{a}$, $2i\Im a = a - \bar{a}$.

(9.4) $|\Re a| \leq |a|$, $|\Im a| \leq |a|$.

(9.5) $|a| \geq 0$ en dan en slechts dan $= 0$ als $a = 0$.

(9.6) $|ab| = |a| |b|$.

(9.7) $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Het nu volgende bewijs van (9.7) moet van onder naar boven gelezen worden.

$$\begin{aligned}
 |a + b| &\leq |a| + |b|, \\
 \sqrt{(a + b)(\bar{a} + \bar{b})} &\leq \sqrt{a\bar{a}} + \sqrt{b\bar{b}}, \\
 (a + b)(\bar{a} + \bar{b}) &\leq (\sqrt{a\bar{a}} + \sqrt{b\bar{b}})^2, \\
 a\bar{a} + a\bar{b} + b\bar{a} + b\bar{b} &\leq a\bar{a} + 2\sqrt{a\bar{a}}\sqrt{b\bar{b}} + b\bar{b}, \\
 a\bar{b} + b\bar{a} &\leq 2\sqrt{a\bar{a}}\sqrt{b\bar{b}}, \\
 a^2\bar{b}^2 + 2ab\bar{a}\bar{b} + b^2\bar{a}^2 &\leq 4a\bar{a}b\bar{b}, \\
 a^2\bar{b}^2 - 2ab\bar{a}\bar{b} + b^2\bar{a}^2 &\leq 0, \\
 (a\bar{b} - b\bar{a})^2 &\leq 0, \\
 \{2i \Im(a\bar{b})\}^2 &\leq 0, \\
 -4 \{ \Im(a\bar{b}) \}^2 &\leq 0.
 \end{aligned}$$

We vragen ons af, wanneer in (9.7) een gelijkteken staat. Dat is dan en slechts dan het geval als in het bovenstaande bewijs ook overal gelijktekens staan. Dat is als $\Im(a\bar{b}) = 0$ en $a\bar{b} + b\bar{a} \geq 0$, dus $\Re(a\bar{b}) \geq 0$. Dus $a\bar{b}$ reëel en ≥ 0 . Als $b \neq 0$, dan is $b\bar{b} > 0$ dus $\frac{a}{b} = \frac{a\bar{b}}{b\bar{b}} \geq 0$. Dus:

(9.8) $|a + b| = |a| + |b|$ geldt dan en slechts dan als $a = 0$, of $b = 0$, of als het quotiënt van a en b positief reëel is.

In de cursus algebra is uiteengezet hoe complexe getallen voorgesteld kunnen worden als punten van het platte vlak. Hierbij wordt o.m. gebruik gemaakt van de functies $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ en hun eigenschappen. We zullen van deze functies voorlopig alleen gebruik maken in voorbeelden, daar wij in het kader van onze opbouw niet aangetoond hebben, dat dit werkelijk functies zijn die voor alle reële waarden van x gedefinieerd zijn.

We zeggen dat het complexe getal c tussen de complexe getallen a en b ligt als $|a - c| + |c - b| = |a - b|$. Het is duidelijk dat c dan ook tussen b en a ligt.

(9.9) Dan en slechts dan ligt c tussen a en b , als er een reëel getal λ bestaat, waarvoor $0 \leq \lambda \leq 1$ zodat $c = \lambda a + (1 - \lambda)b$.

Bewijs: Stel eerst $c = \lambda a + (1 - \lambda)b$, dan is $a - c = (1 - \lambda)(a - b)$ en $c - b = \lambda(a - b)$, dus $|a - c| + |c - b| = |(1 - \lambda)(a - b)| + |\lambda(a - b)| = (1 - \lambda)|a - b| + \lambda|a - b| = |a - b|$. Stel nu $|a - c| + |c - b| = |a - b| = |(a - c) + (c - b)|$. Als $c = b$, dan $c = 0a + (1 - 0)b$. Als $c \neq b$, dan volgens (9.8), $\frac{a - c}{c - b} = \mu$ reëel en ≥ 0 . Hieruit volgt $c(1 + \mu) = a + \mu b$, maar $1 + \mu \geq 1 > 0$, dus $c = \frac{1}{1 + \mu}a + \frac{\mu}{1 + \mu}b$. Nu is $0 < \frac{1}{1 + \mu} \leq 1$. Noem $\frac{1}{1 + \mu} = \lambda$, dan is $c = \lambda a + (1 - \lambda)b$ en $0 < \lambda \leq 1$.

Voor reële getallen stemt het hier gedefinieerde begrip tussen overeen met het vroegere. Stel n.l. $c = \lambda a + (1 - \lambda)b$. Als $a = b$, dan $c = a$. Als $a > b$, dan $c \geq \lambda b + (1 - \lambda)b = b$ en $c \leq \lambda a + (1 - \lambda)a = a$, dus $b \leq c \leq a$. Evenzo voor $a < b$. Stel omgekeerd $b \leq c \leq a$, dan $|a - c| = a - c$, $|c - b| = c - b$,

$a - b| = a - b$, dus $|a - c| + |c - b| = a - c + c - b = a - b = |a - b|$.

Een verzameling V complexe getallen heet convex als uit $a \in V$, $b \in V$, c tussen a en b volgt $c \in V$.

Een convexe verzameling reële getallen heet een interval (in ruimere zin dan vroeger).

(9.10) Een verzameling reële getallen is dan en slechts dan een interval als het een verzameling is van een van de volgende negen typen (hierin stellen a en b willekeurige, maar vaste reële getallen voor):

- 1° alle reële getallen, dit heet $(-\infty, +\infty)$,
- 2° alle reële getallen x , die voldoen aan $a < x$, ,, ,, $(a, +\infty)$,
- 3° ,, ,, ,, x , ,, ,, ,, $a \leq x$, ,, ,, $[a, +\infty)$,
- 4° ,, ,, ,, x , ,, ,, ,, $x < b$, ,, ,, $(-\infty, b)$,
- 5° ,, ,, ,, x , ,, ,, ,, $x \leq b$, ,, ,, $(-\infty, b]$,
- 6° ,, ,, ,, x , ,, ,, ,, $a < x < b$, dit heet (a, b) ,
- 7° ,, ,, ,, x , ,, ,, ,, $a \leq x < b$, ,, ,, $[a, b)$,
- 8° ,, ,, ,, x , ,, ,, ,, $a < x \leq b$, ,, ,, $(a, b]$,
- 9° ,, ,, ,, x , ,, ,, ,, $a \leq x \leq b$, ,, ,, $[a, b]$,

Bewijs: Dat deze negen typen convexe verzamelingen leveren is duidelijk. Om te laten zien, dat een convexe verzameling V reële getallen tot een van de typen behoort, onderscheiden we gevallen, naar gelang de verzameling wel of niet naar boven begrensd is, en wel of niet naar beneden begrensd, en als ze naar boven (resp. beneden) begrensd is, naar gelang de bovenste grens (resp. benedenste grens) wel of niet tot de verzameling behoort. Laat b.v. V wel naar boven en niet naar beneden begrensd zijn en $\sup V = b$ niet tot V behoren. Als $x \geq b$, dan $x \notin V$. Als $x < b$, dan is er, omdat V niet naar beneden begrensd is, een $y \in V$ met $y < x$, en omdat x geen bovengrens is, een $z \in V$ met $z > x$. Omdat V convex is, is dus $x \in V$. Dus V verkeert in geval 4°. Evenzo voor de andere gevallen.

We noemen de intervallen, die in gevallen 1°, 2°, 4° of 6° verkeren open intervallen, die in 3°, 5°, 7°, of 8° halfopen intervallen, die in 9° gesloten intervallen, die in 6°, 7°, 8° of 9° begrensde intervallen.

Opgave 41. Als a en b complexe getallen zijn, heet de verzameling V der complexe getallen tussen a en b een lijnstuk. Bewijs dat een lijnstuk convex is.

Opgave 42. Als a een complex en r een reëel getal ≥ 0 is, heet de verzameling V der complexe getallen x , die voldoen aan $|x - a| \leq r$ een cirkelschijf. Bewijs dat een cirkelschijf convex is.

§10. Euclidische ruimten.

We beschouwen de verzameling der n -tupels reële getallen (α_i) , waarin i natuurlijk, $1 \leq i \leq n$. Deze verzameling heet de n -dimensionale Euclidische (of Cartesische) ruimte. Een element daarvan heet ook een punt. We geven de punten aan met Latijnse, de reële getallen met Griekse letters. We noemen de getallen α_i de componenten (of coördinaten) van (α_i) .

definiëren de som van twee punten $a = (\alpha_i)$ en $b = (\beta_i)$ door $a + b = (\alpha_i + \beta_i)$. Verder definiëren we het product van een reëel getal λ en een punt $a = (\alpha_i)$. Dit is weer een punt en wel $\lambda a = (\lambda \alpha_i)$. Het punt (0) noemen we $\bar{0}$. We definiëren de absolute waarde van een punt $a = (\alpha_i)$ door: $|a| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2}$. Dit is een reëel getal.

(10.1) $|a| \geq 0$ en $= 0$ dan en slechts dan als $a = \bar{0}$.

(10.2) $|\alpha a| = |\alpha| |a|$.

(10.3) $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Hiervan zijn (10.1) en (10.2) makkelijk te bewijzen. Om (10.3) te bewijzen, hebben we eerst de volgende hulpstelling over reële getallen nodig:

(10.4) Als α, β en γ reële getallen zijn, zodat voor alle reële getallen ξ geldt $\alpha \xi^2 + 2\beta \xi + \gamma \geq 0$, dan is $\beta^2 - \alpha \gamma \leq 0$, $\alpha \geq 0$, $\gamma \geq 0$.

Bewijs: 1° $\alpha = 0$. Dan is gegeven $2\beta \xi + \gamma \geq 0$ en te bewijzen $\beta^2 \leq 0$ (dus $\beta = 0$) en $\gamma \geq 0$. Stel $\beta \neq 0$, dan is $0 \leq 2\beta(-\frac{\gamma+1}{2\beta}) + \gamma = -1 < 0$ hetgeen een tegenspraak geeft. Dus $\beta = 0$ en $\gamma \geq 0$.

2° $\alpha < 0$. Noem $\eta = \left| \frac{2\beta}{\alpha} \right| + \left| \frac{\gamma}{\alpha} \right| + 1$, dan is $\eta^2 + \frac{2\beta}{\alpha} \eta + \frac{\gamma}{\alpha} \geq \eta^2 - \left| \frac{2\beta}{\alpha} \right| \eta - \left| \frac{\gamma}{\alpha} \right| \geq \eta^2 - \left(\left| \frac{2\beta}{\alpha} \right| + \left| \frac{\gamma}{\alpha} \right| \right) \eta = \eta^2 - \eta^2 + \eta = \eta > 0$, dus $\alpha \eta^2 + 2\beta \eta + \gamma = \alpha \left(\eta^2 + \frac{2\beta}{\alpha} \eta + \frac{\gamma}{\alpha} \right) < 0$, hetgeen een tegenspraak geeft. Dus $\alpha < 0$ is onmogelijk.

3° $\alpha > 0$. Dan is $0 \leq \alpha \left(-\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 + 2\beta \left(-\frac{\beta}{\alpha} \right) + \gamma = \frac{\alpha \gamma - \beta^2}{\alpha}$, dus $\beta^2 - \alpha \gamma \leq 0$. Stel $\gamma < 0$, dan $\alpha \gamma < 0$, dus $\beta^2 - \alpha \gamma > 0$, hetgeen niet zo is. Dus $\gamma \geq 0$.

Nu bewijzen we (10.3). Stel $a = (\alpha_i)$, $b = (\beta_i)$. Dan is voor een reëel getal λ : $0 \leq |a + \lambda b|^2 = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \lambda \beta_i)^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 + 2\lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i + \lambda^2 \sum_{i=1}^n \beta_i^2$. Nu volgt uit (10.4):

(10.5) $\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n \beta_i^2 \right)$. (ongelijkheid van Schwarz).

Dus $|a + \lambda b|^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 + 2\lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i + \lambda^2 \sum_{i=1}^n \beta_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 + 2\lambda \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n \beta_i^2} + \lambda^2 \sum_{i=1}^n \beta_i^2 = \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2} + \lambda \sqrt{\sum_{i=1}^n \beta_i^2} \right)^2 = (|a| + \lambda |b|)^2$. Dus $|a + \lambda b| \leq |a| + \lambda |b|$.

(10.6) Als voor de reële getallen α, β en γ geldt $\beta^2 - \alpha \gamma = 0$, dan is $\alpha = 0$ of er is een reëel getal ξ waarvoor $\alpha \xi^2 + 2\beta \xi + \gamma = 0$.

Bewijs: Als $\alpha \neq 0$, dan voldoet $\xi = -\frac{\beta}{\alpha}$.

Opgave 43. Ga na onder welke omstandigheden in (10.3) het gelijkteken staat.

De verzameling der complexe getallen is op te vatten als een tweedimensionale Euclidische ruimte. Denk aan de invoering met getallenparen: $a = (Re a, Im a)$.

De definities van som, getallenveelvoud en absolute waarde stemmen overeen met de vroegere. We hebben in deze § dus een nieuw bewijs gegeven voor de driehoeksongelijkheid voor complexe getallen. Evenzo is de verzameling der reële getallen een ééndimensionale Euclidische ruimte.

§11. Metrische ruimten. Convergente rijen.

We hebben het begrip convergentie van een rij tot nu toe voor reële

getallen gedefinieerd. Dit is echter ook mogelijk voor complexe getallen of Euclidische ruimten, in het algemeen als er tussen de elementen een afstand gedefinieerd is. Daarom zullen we nu het convergentiebegrip algemeen invoeren voor dergelijke verzamelingen.

Een verzameling heet een metrische ruimte als aan ieder tweetal elementen a en b een reëel getal $\rho(a,b)$ toegevoegd is, dat de afstand van a en b heet, zodat voldaan is aan:

1° $\rho(a,b) \geq 0$ en $= 0$ dan en slechts dan als $a = b$,

2° $\rho(a,b) = \rho(b,a)$,

3° $\rho(a,b) \leq \rho(a,c) + \rho(c,b)$.

(11.1) Als men in de verzameling der reële of complexe getallen of in een Euclidische ruimte definiëert $\rho(a,b) = |a - b|$, dan zijn deze verzamelingen metrische ruimten.

(11.2) Een deelverzameling van een metrische ruimte is een metrische ruimte (t.o.v. hetzelfde afstandsbe-
grip).

Opgave 44. Als we in een willekeurige verzameling definiëren $\rho(a,b) = 1$ als $a \neq b$ en $\rho(a,a) = 0$, dan geeft dat een metrische ruimte. Bewijs dat.

Een rij a_n punten van een metrische ruimte heet convergent met limiet a als bij ieder reëel getal $\varepsilon > 0$ een N te vinden is, zodat voor $n > N$ geldt $\rho(a, a_n) < \varepsilon$.

Een rij a_n punten van een metrische ruimte heet een fundamentealrij, als bij ieder reëel getal $\varepsilon > 0$ een N te vinden is, zodat voor $n > N$ en $m > N$ geldt $\rho(a_n, a_m) < \varepsilon$.

(11.3) Een convergente rij heeft niet meer dan één limiet.

(11.4) Een convergente rij is een fundamentealrij.

De bewijzen van (11.3) en (11.4) zijn geheel analoog met die in §7.

(11.5) Als in een convergente rij eindig veel termen veranderd worden, ontstaat een rij die convergent is met dezelfde limiet als de oorspronkelijke rij.

Opgave 45. Bewijs (11.5).

(11.6) Als (n) een éénéérduilige afbeelding van de verzameling der natuurlijke getallen in zichzelf is, a_n een convergente rij met limiet a en $b_n = a_{\varphi(n)}$, dan is b_n convergent met limiet a .

Bewijs: Neem een willekeurige $\varepsilon > 0$, dan is daarbij een N zodat voor $n > N$ geldt $\rho(a, a_n) < \varepsilon$. De verzameling der natuurlijke getallen m , waarvoor geldt $\varphi(m) \leq N$, is gelijkmachting met een deelverzameling van het beginstuk $[1, N]$ der natuurlijke getallen en dus eindig. Als ze leeg is, geldt $\varphi(m) > N$ voor alle m ; als ze niet leeg is, heeft ze een maximum M en dan geldt $\varphi(m) > N$ voor alle $m > M$. In ieder geval is er dus een M zodat voor $m > M$ geldt $\varphi(m) > N$ en dus $|a - b_m| = |a - a_{\varphi(m)}| < \varepsilon$.

Als de afbeelding $\varphi(n)$ bovendien nog voldoet aan: uit $m < n$ volgt $\varphi(m) < \varphi(n)$, dan heet b_n een deelrij van a_n . Als $\varphi(n)$ een afbeelding van de natuurlijke getallen op zichzelf is heet b_n een verschikte rij van a_n .

Speciale gevallen van (11.6) zijn dus:

(11.7) Een deelrij van een convergente rij is convergent met dezelfde limiet.

(11.8) Een verschikte rij van een convergente rij is convergent met dezelfde limiet.

Als voor de rijen a_n en b_n geldt, dat er een k is zodat $b_{n+k} = a_n$ voor alle n dan zegt men dat b_n uit a_n ontstaat door k elementen voor te plaatsen.

(11.9) Als a_n convergent is en b_n uit a_n ontstaat door k elementen voor te plaatsen, is b_n convergent met dezelfde limiet.

Opgave 46. Bewijs (11.9). Merk verder op, dat men door (11.9) en (11.6) te combineren ook kan komen tot het toevoegen van eindig veel elementen (niet noodzakelijk aan het begin van de rij). Formuleer dat.

Dit alles geldt voor algemene metrische ruimten. Nu specialiseren we tot een n - dimensionale Euclidische ruimte. Met een rij a_m punten, $a_m = (\alpha_{im})$, corresponderen n rijen der componenten α_{im} . (hierin is i een natuurlijk getal $\leq n$; m doorloopt alle natuurlijke getallen).

(11.10) Een rij punten van een Euclidische ruimte is convergent dan en slechts dan, als alle rijen der componenten convergeren en wel is dan de limiet van een componentenrij de overeenkomstige component van de limiet der rij punten.

Bewijs: 1° $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = a$ zij gegeven. Dan is bij iedere $\varepsilon > 0$ een N te vinden zodat voor $m > N$ geldt $|a - a_m| < \varepsilon$. Maar nu volgt uit de definitie van absolute waarde direct, dat $|\alpha_i - \alpha_{im}| \leq |a - a_m|$ voor alle $i \leq n$. Dus $\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_{im} = \alpha_i$ voor alle $i \leq n$.

2° $\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_{im} = \alpha_i$ voor alle $i \leq n$ zij gegeven. Bij iedere $\varepsilon > 0$ is een N_i te vinden zodat voor $m > N_i$ geldt $|\alpha_i - \alpha_{im}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. Noem $N = \max_{i \leq n} N_i$; voor $m > N$ en voor alle $i \leq n$ geldt dan $(\alpha_i - \alpha_{im})^2 < \frac{\varepsilon^2}{n}$, dus

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_{im})^2 < n \frac{\varepsilon^2}{n} = \varepsilon^2, \text{ dus } |a - a_m| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_{im})^2} < \varepsilon, \text{ dus } \lim_{m \rightarrow \infty} a_m = a.$$

(11.11) Een rij punten van een Euclidische ruimte is een fundamentealrij dan en slechts dan, als alle rijen der componenten fundamentealrijen zijn.

Het bewijs is geheel analoog met dat van (11.10).

(11.12) In een Euclidische ruimte is een fundamentealrij convergent (m.a.w. in een Euclidische ruimte geldt de convergentiestelling van Cauchy).

Opgave 47. Bewijs (11.12).

(11.13) Als in een Euclidische ruimte geldt $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = a$, dan is $\lim_{m \rightarrow \infty} |a_m| = |a|$.

Dit volgt direct uit $||a| - |b|| \leq |a - b|$, hetgeen net zo bewezen wordt als in opgave 19.

(11.14) Als in een Euclidische ruimte geldt $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = a$ en $\lim_{m \rightarrow \infty} b_m = b$, dan zijn de rijen $a_m + b_m$ en $a_m - b_m$ ook convergent en $\lim_{m \rightarrow \infty} (a_m + b_m) = a + b$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (a_m - b_m) = a - b.$$

(11.15) Als in een Euclidische ruimte geldt $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = a$ en voor de rij reële getallen α_m , dat $\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m = \alpha$, dan is de rij $\alpha_m a_m$ convergent en $\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m a_m = \alpha a$.

Opgave 48. Bewijs (11.14) en (11.15).

Het voorgaande geldt ook voor complexe getallen en reële getallen (als twee- resp ééndimensionale Euclidische ruimten). We formuleren (11.10) nog even voor complexe getallen:

(11.16) Een rij a_m complexe getallen convergeert dan en slechts dan als de rijen der reële en der imaginaire gedeelten convergeren en er geldt $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \operatorname{Re} a_m + i \lim_{m \rightarrow \infty} \operatorname{Im} a_m$.

Voor complexe getallen (en dus ook voor reële getallen) geldt verder nog:

(11.17) Als a_m en b_m convergente rijen complexe getallen zijn ($\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = a$ en $\lim_{m \rightarrow \infty} b_m = b$), dan is de rij $a_m b_m$ convergent met $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m b_m = ab$. Als bovendien $b \neq 0$ en $b_m \neq 0$ voor alle m is de rij $\frac{a_m}{b_m}$ convergent met $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_m}{b_m} = \frac{a}{b}$.

Opgave 49. Bewijs (11.17).

(11.18) Als a_m en b_m convergente rijen reële getallen zijn met limiet a resp. b en $a_m \leq b_m$ voor alle m dan is $a \leq b$.

Bewijs: Als $a > b$, dan is er een m te vinden zodat $|(a - b) - (a_m - b_m)| < \frac{1}{2}(a - b)$, dus $a - b - a_m + b_m < \frac{1}{2}(a - b)$, $b_m - a_m < -\frac{1}{2}(a - b) < 0$, $b_m < a_m$. Dus $a \leq b$.

Opgave 50. In een Euclidische ruimte definiëren we $\|a\| = \max_{1 \leq i \leq n} |\alpha_i|$ voor $a = (\alpha_i)$. Bewijs, dat $\|a\|$ ook aan de eigenschappen (10.1), (10.2) en (10.3) voldoet. Hoe ziet voor $n = 2$ de "cirkel" $\|x\| = \gamma$ (γ een constante) er uit?

Opgave 51. Definiëren we de afstand $\bar{\rho}(a, b)$ door $\bar{\rho}(a, b) = \|a - b\|$, dan voldoet dit aan de axioma's van een metrische ruimte. Toon aan dat het begrip convergentie in deze metrische ruimte hetzelfde is als in die gedefiniëerd met de gewone absolute waarde, d.w.z. als een rij a_m convergent is volgens de $||$ -definitie dan ook volgens de $\bar{\rho}$ -definitie en omgekeerd.

§12. Open en gesloten verzamelingen. Compacte ruimten.

In een metrische ruimte verstaan we onder de ε -omgeving van een punt a de verzameling van alle punten x met $\rho(a, x) < \varepsilon$. Voor de reële getallen is dat het interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Van een verzameling V in een metrische ruimte R heet $a \in R$ een verdichtingspunt, als bij iedere $\varepsilon > 0$ een $x \in V$ te vinden is, zodat $x \neq a$ en $\rho(a, x) < \varepsilon$, m.a.w. in iedere ε -omgeving van a ligt een van a ver-

schillend punt van V . Het punt a behoort niet tot V te behoren.

(12.1) Een punt a is dan en slechts dan verdichtingspunt van V als er een rij a_n punten van V is, die van elkaar en van a verschillen (d.w.z. uit $m \neq n$ volgt $a_m \neq a_n$ en voor alle n is $a_n \neq a$), zodat $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Bewijs: Dat uit het bestaan van een dergelijke rij volgt, dat a verdichtingspunt is, is duidelijk. Laat omgekeerd a verdichtingspunt zijn. Kies a_1 , zodat $a_1 \in V$, $a_1 \neq a$ en $\rho(a, a_1) < 1$. Stel a_n gekozen, zodat $a_n \in V$, $a_n \neq a$, $\rho(a, a_n) < \frac{1}{n}$ en voor $n > 1$ bovendien $\rho(a, a_n) < \rho(a, a_{n-1})$, kies dan a_{n+1} zodat $a_{n+1} \in V$, $a_{n+1} \neq a$, $\rho(a, a_{n+1}) < \min\left\{\frac{1}{n+1}, \rho(a, a_n)\right\}$. Dat kan omdat wegens $a_n \neq a$ geldt $\rho(a, a_n) > 0$. Dan is makkelijk te bewijzen dat uit $m < n$ volgt $\rho(a, a_m) < \rho(a, a_n)$, dus zeker $a_m \neq a_n$. Verder is $a_n \neq a$ en $a_n \in V$ en $\rho(a, a_n) < \frac{1}{n}$ voor alle n . Daaruit volgt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Uit (12.1) volgt ook direct:

(12.2) Een punt a is dan en slechts dan verdichtingspunt van V als in iedere ε -omgeving van a oneindig veel punten van V liggen.

Een verzameling V in een metrische ruimte R heet gesloten (of afgesloten) als alle verdichtingspunten van V tot V behoren.

Een verzameling V in een metrische ruimte R heet open als bij iedere $a \in V$ een $\varepsilon > 0$ te vinden is, zodat de ε -omgeving van a geheel tot V behoort.

De begrippen open en gesloten zijn relatieve begrippen. Of V open (resp. gesloten) is of niet hangt niet alleen van V zelf af, maar ook van de ruimte R waar V in ligt. Zo is het interval $(0,1)$ open in de ruimte der reële, maar niet open in de ruimte der complexe getallen. Om deze relativiteit tot uitdrukking te brengen zeggen we open in R (resp. gesloten in R). Als er geen gevaar voor verwarring is laten we "in R " echter weg. Opgave 52. R zij de ruimte der reële getallen. Zijn de volgende verzamelingen al of niet open (resp. gesloten)? 1° de verzameling van alle rationale getallen, 2° een eindige verzameling reële getallen, 3° de verzameling van alle reële getallen, 4° de verzameling der getallen $\frac{1}{n}$ (n natuurlijk), 5° de verzameling der natuurlijke getallen.

Opgave 53. Dezelfde vraag als R de verzameling der positieve reële getallen is. De gevallen 1°, 2° en 3° moeten dan ook tot positieve getallen beperkt worden.

(12.3) Het complement van een open verzameling is gesloten; het complement van een gesloten verzameling is open.

Bewijs: Stel O open in R . Neem een verdichtingspunt a van R/O . Als $a \in O$, dan is er een $\varepsilon > 0$, zodat de ε -omgeving van a tot O behoort in strijd met het feit dat a verdichtingspunt van R/O is. Dus $a \notin O$, $a \in R/O$, R/O is gesloten. Stel A gesloten in R . Neem een punt $a \in R/A$. Stel dat in iedere ε -omgeving van a een punt van A lag (dat dan zeker wegens $a \notin A$ van a verschilde), dan was a verdichtingspunt van A , dus

$a \in A$, $a \notin R/A$, hetgeen een tegenspraak is. Dus moet er een ε - omgeving van a bestaan, die geen punten van A bevat, dus geheel tot R/A behoort. Dus R/A is open.

(12.4) Als van een niet - lege naar boven begrensde verzameling V reële getallen de bovenste grens a niet tot V behoort, is a een verdichtingspunt van V .

Bewijs: Voor iedere $\varepsilon > 0$ is $a - \varepsilon$ geen bovengrens van V . Er is dus een $x \in V$, zodat $a - \varepsilon < x \leq a$, en $x \neq a$ omdat $a \notin V$. Dus $|a - x| < \varepsilon$; a is verdichtingspunt.

Een direct gevolg van (12.4) is:

(12.5) Een verzameling reële getallen, die niet - leeg, naar boven begrensd en gesloten is, heeft een grootste element.

Een metrische ruimte heet compact, als iedere rij punten van die ruimte een convergente deelrij bezit.

Het begrip compact is geen relatief begrip. Om dus b.v. te bewijzen, dat een deelverzameling V der reële getallen een compacte ruimte vormt, moet niet alleen aangetoond worden, dat iedere rij uit V een deelrij heeft die naar een reëel getal convergeert, maar zelfs een deelrij die naar een element van V convergeert.

(12.6) Een metrische ruimte is dan en slechts dan compact als iedere oneindige deelverzameling een verdichtingspunt heeft.

Bewijs: Stel de ruimte is compact. Neem een oneindige deelverzameling. Daaruit kan een rij met verschillende elementen gevormd worden. Deze heeft een convergente deelrij, die natuurlijk ook verschillende elementen heeft. De limiet is verdichtingspunt. Stel nu een ruimte, zodat iedere oneindige deelverzameling een verdichtingspunt heeft. Neem een rij a_n uit die ruimte. Beschouw de verzameling V der elementen a_n . We onderscheiden twee gevallen:

1° V is oneindig. Dan heeft V een verdichtingspunt a . Er is een $b_1 \in V$ met $b_1 \neq a$ en $\rho(a, b_1) < 1$. Dan is $b_1 = a_{\varphi(1)}$. Stel b_n zo gekozen, dat $b_n \in V$ (dus $b_n = a_{\varphi(n)}$), $b_n \neq a$, $\rho(a, b_n) < \frac{1}{n}$ en voor $n > 1$ bovendien $\varphi(n) > \varphi(n-1)$. Noem $\delta_n = \min\left(\frac{1}{n+1}, \rho(b_n, a)\right)$, dan is, wegens $b_n \neq a$, $\delta_n > 0$. Omdat de deelverzameling der $x \in V$, waarvoor $\rho(a, x) < \delta_n$, oneindig is, is er een $i_n > \varphi(n)$, zodat $\rho(a_{i_n}, a) < \delta_n$ en $a_{i_n} \neq a$. Noem deze $i_n = \varphi(n+1)$ en $a_{\varphi(n+1)} = b_{n+1}$, dan is $b_{n+1} \in V$, $b_{n+1} \neq a$, $\rho(a, b_{n+1}) < \frac{1}{n+1}$ en $\varphi(n+1) > \varphi(n)$. De rij b_n is nu blijkbaar een deelrij van de rij a_n . Verder is $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$, dus a_n heeft een convergente deelrij.

2° V is eindig. Dan is er een $x \in V$, zodat de verzameling K der natuurlijke getallen i , waarvoor $a_i = x$, oneindig is (anders was de verzameling der natuurlijke getallen eindig). We definiëren nu: $\varphi(1)$ is het kleinste element van K en $\varphi(n+1)$ is het kleinste element van K dat groter dan $\varphi(n)$ is. Dan is $b_n = a_{\varphi(n)}$ een deelrij van a_n en wel een constante, en dus convergente deelrij.

(12.7) (Stelling van Bolzano - Weierstrass). In een Euclidische ruimte heeft iedere begrensde oneindige deelverzameling V een verdichtingspunt.

Bewijs: Omdat V begrensde is, is er een γ zodat $|x| \leq \gamma$ voor alle $x \in V$. ($x = (\xi_i)$). Daarvoor is dan ook $|\xi_i| \leq \gamma$, dus $\xi_i \in [-\gamma, \gamma]$. We verdelen elk der intervallen in tweeën, n.l. $[-\gamma, 0]$ en $[0, \gamma]$ en krijgen zo een verdeling van de verzameling der punten waarvoor $|\xi_i| \leq \gamma$, in eindig veel (en wel 2^n) deelverzamelingen (die niet disjunct zijn). Minstens één er van moet oneindig veel punten van V bevatten. Noem de daarbij horende intervallen $[\alpha_{i1}, \beta_{i1}]$. Als $[\alpha_{im}, \beta_{im}]$ gevonden zijn verdelen we deze weer in tweeën en vinden evenals boven $[\alpha_{i,m+1}, \beta_{i,m+1}]$, zodat de verzameling der punten waarvoor $\xi_i \in [\alpha_{i,m+1}, \beta_{i,m+1}]$ met V oneindig veel punten gemeen heeft. Houd de i nu vast. De lengte van een interval $[\alpha_{im}, \beta_{im}]$ is $2^{-m+1}\gamma$ en convergeert dus naar nul. Verder zijn ze in elkaar geschaald. Er is dus een σ_i zodat $\sigma_i \in [\alpha_{im}, \beta_{im}]$ voor alle m . Beschouw het punt $s = (\sigma_i)$. We bewijzen dat s een verdichtingspunt van V is. Kies een $\varepsilon > 0$, dan is daarbij een N_{i1} , zodat voor $m > N_{i1}$ geldt $\sigma_i - \alpha_{im} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ en een N_{i2} zodat voor $m > N_{i2}$ geldt $\beta_{im} - \sigma_i < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. Neem nu $m = \max_{1 \leq i \leq n} (N_{i1}, N_{i2}) + 1$ dan is er een $x = (\xi_i)$, zodat $x \in V$, $x \neq s$ en $\xi_i \in [\alpha_{im}, \beta_{im}]$, dus $\sigma_i - \xi_i \leq \sigma_i - \alpha_{im} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$, $\xi_i - \sigma_i \leq \beta_{im} - \sigma_i < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$, dus $|\sigma_i - \xi_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$, dus $|s - x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\sigma_i - \xi_i)^2} < \varepsilon$.

(12.8) Een deelverzameling V van een Euclidische ruimte is compact dan en slechts dan als ze begrensde en gesloten (in de Euclidische ruimte) is.

Bewijs: Stel V is begrensde en gesloten. Neem een oneindige deelverzameling van V . Deze is ook begrensde en heeft dus volgens Bolzano - Weierstrass een verdichtingspunt in de Euclidische ruimte, dat, omdat V gesloten is, tot V behoort. Dus volgens (12.6) is V compact. Stel nu V compact. Stel dat V onbegrensde is, dan kiezen we $a_1 \in V$ willekeurig en als $a_n \in V$ gevonden is, $a_{n+1} \in V$ zodat $|a_{n+1}| > |a_n| + 1$. Voor $i \neq j$ geldt dan $|a_i - a_j| > 1$ (volledige inductie naar $|i - j|$). Voor een deelrij geldt hetzelfde, dus geen enkele deelrij kan convergent zijn, in strijd met het feit dat V compact is. Dus V is begrensde. Stel nu dat a een verdichtingspunt van V is. Dan is er een rij b_n met $b_n \in V$ voor alle n , die naar a convergeert. Deze heeft, omdat V compact is, een deelrij, die naar een element van V convergeert, maar een deelrij van b_n convergeert naar a , dus $a \in V$. Dus V is gesloten.

Bij intervallen hebben we ook de begrippen open en gesloten gehad. Deze stemmen niet geheel overeen met de begrippen open en gesloten verzameling. Voor open is het wel het geval:

(12.9) Een interval is dan en slechts dan een open verzameling in de ruimte der reële getallen als het een open interval is.

Voor de gesloten verzamelingen is de situatie wat ingewikkelder:

(12.10) Een interval is dan en slechts dan een gesloten verzameling in de ruimte der reële getallen als het verkeert in een der gevallen 1° , 3° , 5° of 9° van stelling (9.10). Een gesloten interval is dus wel altijd een gesloten verzameling, maar een interval dat een gesloten verzameling is hoeft geen gesloten interval te zijn.

(12.11) Een interval is dan en slechts dan een gesloten interval, als het een compacte ruimte is.

Opgave 54. Bewijs (12.9), (12.10) en (12.11).

(12.12) Een niet-lege compacte verzameling V reële getallen heeft een grootste en een kleinste element.

Bewijs: Volgens (12.8) is V begrensd. Dus V heeft een bovenste grens. Als $\sup V \notin V$, is volgens (12.4), $\sup V$ verdichtingspunt van V , dus, volgens (12.8), $\sup V \in V$, hetgeen een tegenspraak geeft. Dus $\sup V \in V$; V heeft een grootste element. Evenzo bewijst men dat V een kleinste element heeft.

Opgave 55. Van een rij reële getallen a_n is $\limsup a_n$ de grootste a (reëel getal, $+\infty$ of $-\infty$), waarvoor geldt dat er een deelrij van a_n is met $\lim = a$. (Bewijs eerst dat, als b limiet is van een deelrij van a_n , $b \leq \limsup a_n$ en dan dat er een deelrij bestaat waarvan $\lim = \limsup a_n$).

§13. Continue functies.

Een functie hebben we in §1 gedefinieerd als een afbeelding van een verzameling in een andere (of dezelfde) verzameling; $f(x)$ is het beeld van x bij de afbeelding f . We noemen het beeld ook wel de functiewaarde, het origineel, het argument van de functie. Als S de verzameling is die afgebeeld wordt (de definitieverzameling) en T de verzameling waarin afgebeeld wordt (de beeldverzameling) schrijven we ook wel $f(S) \subset T$; als het een afbeelding op is $f(S) = T$. Als zowel S als T deelverzamelingen der verzameling reële getallen zijn spreken we van een reële functie. Van een reële functie kunnen we een aanschouwelijke voorstelling ontwerpen door er een grafiek van te maken, dat is door in het platte vlak de puntverzameling te tekenen bestaande uit die punten (x, y) , waarvoor $y = f(x)$. Het is duidelijk, dat bij iedere reële waarde van x hoogstens één y behoort, zodat (x, y) tot de grafiek behoort, m.a.w. iedere lijn evenwijdig met de Y -as snijdt de grafiek in ten hoogste één punt.

Opgave 56. Het grootste gehele getal dat $\leq$ een reëel getal x is, schrijven we en noemen we entier x . Schets een grafiek van de functie $[x]$ en van de functie $x - [x]$.

Wanneer we de volgende reële functie beschouwen: $f(x) = 0$, als x

irrationaal is en $f(x) = 1$, als x rationaal is, dan is het bevredigend tekenen van een grafiek niet meer mogelijk. Dat komt omdat deze functie het "vloeiende" karakter mist, dat de functies waarvan we wel grafieken konden tekenen, althans bij gedeelten, wel bezaten. Dit vloeiende karakter komt hierop neer, dat als de argumentwaarden dicht bij elkaar liggen, de functiewaarden ook dicht bij elkaar liggen. Voor een preciese formulering hiervan is het blijkbaar nodig, dat in de definitie- en in de beeldverzameling een afstand gedefinieerd is.

We spreken af, dat voorlopig voor alle te beschouwen functies geldt dat definitie- en beeldverzameling beide metrische ruimten zijn.

We noemen een functie $f(S) \subset T$ continu in het punt $a \in S$, als bij ieder reëel getal $\varepsilon > 0$ een reëel getal $\delta > 0$ te vinden is, zodat voor alle $x \in S$, waarvoor $\rho(a, x) < \delta$, geldt $\rho(f(a), f(x)) < \varepsilon$ (ε - δ -definitie van continuïteit). Als f continu is in alle punten van S , noemen we f continu (zonder nadere toevoeging).

We kunnen nu een verband leggen met het begrip convergentie, door de eigenschap, dat continue functies die functies zijn die convergente rijen in convergente rijen overvoeren:

(13.1) Een functie $f(S) \subset T$ is dan en slechts dan continu in $a \in S$, als voor iedere rij $a_n \in S$ met $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a)$ (limietdefinitie van continuïteit).

Bewijs: Stel eerst dat f continu is in a en neem een rij $a_n \in S$ met $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Bij iedere $\varepsilon > 0$ is nu een $\delta > 0$ te vinden zodat uit $x \in S$ en $\rho(a, x) < \delta$ volgt $\rho(f(a), f(x)) < \varepsilon$. Maar bij $\delta > 0$ is een N te vinden zodat uit $n > N$ volgt $\rho(a, a_n) < \delta$, dus $\rho(f(a), f(a_n)) < \varepsilon$. Dus $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a)$.

Stel nu dat voor iedere rij $a_n \in S$ met $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a)$. Stel er is een $\varepsilon_0 > 0$ zodat bij iedere $\delta > 0$ een $x \in S$ met $\rho(a, x) < \delta$ te vinden is, zodat $\rho(f(a), f(x)) \geq \varepsilon_0$. Dan is er een rij $x_n \in S$ met $\rho(a, x_n) < \frac{1}{n}$, zodat $\rho(f(a), f(x_n)) \geq \varepsilon_0$ voor alle n . Dan is $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, dus $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ hetgeen in strijd is met $\rho(f(a), f(x_n)) \geq \varepsilon_0$ voor alle n . Dus f is continu in a .

We moeten in het oog houden, dat de definitieverzameling van de functie als metrische ruimte wordt opgevat, zodat we voor een reële functie die niet voor alle reële getallen gedefinieerd is (b.v. $\frac{1}{x}$), als ruimte niet alle reële getallen, maar alleen de definitieverzameling nemen. We zullen in de toekomst, als we b.v. zeggen dat we een punt x nemen, daarmee bedoelen: uit de definitieverzameling van de beschouwde functie.

(13.2) Als S compact is en $f(S) = T$ continu, dan is T compact. Als f bovendien eeneenduidig is, is de omkeersfunctie van f ook continu.

Bewijs: Neem een rij $a_n \in T$. Bij iedere a_n is een $b_n \in S$ te vinden zodat $f(b_n) = a_n$. Omdat S compact is, heeft b_n een convergente deelrij $\lim_{n \rightarrow \infty} b_{\varphi(n)} = b$. Wegens de continuïteit van f is $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_{\varphi(n)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{\varphi(n)} = f(b)$. Dus a_n bezit een convergente deelrij, dus T is compact. Stel nu

f oecenduidig met omkeersfunctie g (dus $f(g(y)) = y$ voor alle $y \in T$ en $g(f(x)) = x$ voor alle $x \in S$). Stel er is een $a \in T$, zodat g niet continu in a is. Dan is er een $\varepsilon_0 > 0$ zodat er een rij $a_n \in T$ te vinden is met $\rho(a, a_n) < \frac{1}{n}$ en $\rho(g(a), g(a_n)) \geq \varepsilon_0$. Nu is $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Omdat S compact is, bezit de rij $g(a_n)$ een convergente deelrij: $\lim_{n \rightarrow \infty} g(a_{\psi(n)}) = b$. Omdat f continu is volgt hieruit $f(b) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(g(a_{\psi(n)})) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{\psi(n)} = a$, dus $b = g(f(b)) = g(a)$. Dit is echter in strijd met $\rho(g(a), g(a_{\psi(n)})) \geq \varepsilon_0$ voor alle n . Dus g is continu.

(13.3) Een reële continue functie, gedefinieerd op een niet - lege begrensde gesloten verzameling heeft een maximum en een minimum.

Dit volgt uit (12.8), (13.2) en (12.12).

(13.4) (Middelwaardstelling van Weierstrass) Een reële continue functie f gedefinieerd op een gesloten interval $[a, b]$ neemt iedere waarde tussen $f(a)$ en $f(b)$ aan, d.w.z. als c tussen a en b ligt bestaat er een $\xi \in [a, b]$, zodat $f(\xi) = c$.

Bewijs: Als $f(a) = f(b)$, dan is $c = f(a) = f(b)$ en we kunnen $\xi = a$ kiezen. Als $f(a) < f(b)$, dan $f(a) < c < f(b)$. Neem de verzameling V der reële getallen x , waarvoor geldt $x \in [a, b]$ en $f(x) \leq c$. V is niet leeg, want $a \in V$ en begrensd, dus V heeft een bovenste grens ξ . Stel $\xi \notin V$, dus $f(\xi) > c$, dan is er een $\bar{\varepsilon}_1 > 0$ zodat voor alle $x \in [a, b]$ met $|x - \xi| < \bar{\varepsilon}_1$ geldt $|f(x) - f(\xi)| < f(\xi) - c$, dus $f(\xi) - f(x) < f(\xi) - c$, dus $f(x) > c$. Verder is $\xi > a$, dus voor $x_1 = \max(a, \xi - \frac{1}{2}\bar{\varepsilon}_1)$ geldt $x_1 \in [a, b]$, $x_1 < \xi$ en $|x_1 - \xi| < \bar{\varepsilon}_1$ (dus $f(x_1) > c$) voor alle x met $x_1 \leq x < \xi$. Dus x_1 is bovengrens van V , hetgeen een tegenspraak geeft. Dus $\xi \in V$, dus $f(\xi) \leq c$.

Als $f(\xi) < c$, dan is er een $\bar{\varepsilon}_2 > 0$, zodat voor alle $x \in [a, b]$ met $|x - \xi| < \bar{\varepsilon}_2$ geldt $|f(x) - f(\xi)| < c - f(\xi)$, dus $f(x) - f(\xi) < c - f(\xi)$, dus $f(x) < c$. Verder is $\xi < b$, dus voor $x_2 = \min(b, \xi + \frac{1}{2}\bar{\varepsilon}_2)$ geldt $x_2 \in [a, b]$, $x_2 > \xi$ en $|x_2 - \xi| < \bar{\varepsilon}_2$, dus $f(x_2) < c$, hetgeen een tegenspraak geeft met het feit dat ξ bovengrens van V is. Dus $f(\xi) = c$, hetgeen te bewijzen was. Het geval $f(a) > f(b)$ wordt geheel analoog behandeld.

(13.5) Als van een reële continue functie $f(S) = T$ de definitieverzameling S een interval is, dan is de beeldverzameling T ook een interval.

Bewijs: Neem twee getallen $a_1 \in T$, $a_2 \in T$, $a_1 < a_2$ en een willekeurig reëel getal c tussen a_1 en a_2 : $a_1 \leq c \leq a_2$. Er is een $b_1 \in S$ zodat $f(b_1) = a_1$ en een $b_2 \in S$ zodat $f(b_2) = a_2$; dan is zeker $b_1 \neq b_2$. Stel $b_1 < b_2$ ($b_1 > b_2$ gaat analoog). Omdat S convex is, geldt $[b_1, b_2] \subset S$, dus f is in $[b_1, b_2]$ gedefinieerd. Volgens Weierstrass is er een $\xi \in [b_1, b_2]$ (dus zeker $\xi \in S$), zodat $f(\xi) = c$, dus $c \in T$, T is convex, dus een interval.

Een reële functie $f(x)$ heet monotoon niet-dalend (of isotoon) als uit $x < y$ volgt $f(x) \leq f(y)$, monotoon niet-stijgend (of antitoon) als uit $x < y$ volgt $f(x) \geq f(y)$, monotoon stijgend (of streng isotoon) als uit

$x < y$ volgt $f(x) < f(y)$, monotoon dalend (of streng antitoon) als uit $x < y$ volgt $f(x) > f(y)$. In de laatste twee gevallen heet de functie streng monotoon, in alle vier de gevallen monotoon.

(13.6) Als een reële functie streng monotoon is, dan is zij eeneenduidig de omkeersfunctie is dan ook streng monotoon.

Opgave 57. Bewijs (13.6).

(13.7) Voor een op een interval gedefinieerde eeneenduidige continue reële functie $f(x)$ geldt: uit $x < y < z$ volgt $f(x) < f(y) < f(z)$ of $f(x) > f(y) > f(z)$.

Bewijs: Gelijkttekens zijn uitgesloten wegens de eeneenduidigheid. Stel $f(x) < f(y)$. Als nu $f(z) < f(x)$ is, ligt $f(x)$ tussen $f(y)$ en $f(z)$, dus volgens Weierstrass ligt er op $[y, z]$ een punt ξ zodat $f(\xi) = f(x)$, maar $\xi > y > x$, hetgeen een tegenspraak geeft. Dus $f(z) > f(x)$. Als nu $f(z) < f(y)$ is, ligt $f(z)$ tussen $f(x)$ en $f(y)$, dus is er op $[x, y]$ een punt ξ zodat $f(\xi) = f(z)$, maar $\xi \leq y < z$, hetgeen een tegenspraak geeft. Dus $f(y) < f(z)$. Het geval $f(x) > f(y)$ wordt analoog behandeld.

(13.8) Voor een op een interval gedefinieerde eeneenduidige continue functie $f(x)$ geldt: uit $x < y < z < u$ volgt $f(x) < f(y) < f(z) < f(u)$ of $f(x) > f(y) > f(z) > f(u)$.

Dit bewijst men door twee maal (13.7) toe te passen.

(13.9) Een op een interval gedefinieerde eeneenduidige continue functie is streng monotoon.

Bewijs: Neem twee getallen a en b in het interval met $a < b$. Stel $f(a) < f(b)$. Neem nu twee willekeurige punten x en y in het interval. Er zijn allerlei verschillende liggingen van x, y, a en b mogelijk, maar steeds geeft (13.7) of (13.8), dat $f(x) < f(y)$. Dus is $f(x)$ streng monotoon. Het geval $f(a) > f(b)$ wordt op analoge wijze behandeld.

(13.10) Een op een interval gedefinieerde reële continue streng monotone functie $f(x)$ heeft een omkeersfunctie, die ook reëel, continu, streng monotoon en op een interval gedefinieerd is. Als het definitie interval een gesloten interval is, is het definitie interval van de omkeersfunctie ook een gesloten interval.

Bewijs: Wegens (13.6) is $f(x)$ eeneenduidig, dus de omkeersfunctie $g(x)$ bestaat. Wegens (13.5) is $g(x)$ op een interval gedefinieerd, wegens (13.6) streng monotoon. We behandelen nu eerst het geval, dat de definitieverzameling van $f(x)$ een gesloten interval is. Dit is wegens (12.11) een compacte ruimte, dus wegens (13.2) het beeld ook. De definitieverzameling van $g(x)$ is dus een interval en compact, dus een gesloten interval; verder is $g(x)$ continu (alles wegens (13.2)). Nu een willekeurig interval I . Het beeld is ook een interval K . Nu bewijzen we de continuïteit van $g(x)$ in een willekeurig punt $a \in K$. Als a geen begin of eindpunt van K is bestaat er een reëel getal λ , zodat $J =$

$= [a-\lambda, a+\lambda]$ geheel tot K behoort, als a beginpunt van K is een reëel getal λ zodat $J = [a, a+\lambda]$ geheel tot K behoort en als a eindpunt van K is een reëel getal λ , zodat $J = [a-\lambda, a]$ geheel tot K behoort. In alle gevallen corresponderen met begin- en eindpunt van J twee punten van I , die we c en d ($c < d$) noemen. Beschouw nu de functie $f(x)$ op $[c, d]$ dan is, volgens de monotonie van $f(x)$, J het beeld van $[c, d]$. Volgens het reeds bewezene is dan $g(x)$, voor zover x tot J behoort, continu in a . Maar dan geldt hetzelfde ook voor $g(x)$ in K , want als we in de ε - δ -definitie de δ steeds kleiner dan λ kiezen, ligt de δ -omgeving van a , voor zover ze in K ligt, ook geheel in J .

Als $f(S_1) = T_1$, $g(S_2) = T_2$ en T_1 en T_2 deelverzamelingen van dezelfde Euclidische ruimte zijn, dan verstaan we onder de som van de functies $f(x)$ en $g(x)$ de functie $h(x)$ gedefinieerd op $S_1 \cap S_2$, zodat $h(x) = f(x) + g(x)$. Analooch het verschil. Als T_1 en T_2 deelverzamelingen van de complexe getallen zijn, analooch product en quotiënt (het laatste gedefinieerd in die punten van $S_1 \cap S_2$, waar $g(x) \neq 0$).

(13.11) Als de functies $f(x)$ en $g(x)$ continu zijn, zijn hun som, verschil, product en quotiënt ook continu.

Dit bewijst men met de limietdefinitie en de overeenkomstige stellingen over convergente rijen.

(13.12) Een constante functie (d.w.z. $f(x) = f(y)$ voor alle x en y) is continu.

(13.13) De identieke functie $f(x) = x$ is continu.

Beide stellingen zijn evident.

(13.14) Een gehele rationale functie (of polynoom) $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i$

(a_i complexe getallen), gedefinieerd voor alle complexe getallen, is continu.

Dit volgt met volledige inductie uit (13.11), (13.12) en (13.13).

(13.15) Een gebroken rationale functie $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ($P(x)$ en $Q(x)$ polynomen), gedefinieerd voor alle complexe getallen x waarvoor $Q(x) \neq 0$, is continu.

Dit volgt uit (13.11) en (13.14).

(13.16) De functie $f(x) = x^n$ (n geheel en $\neq 0$), gedefinieerd voor reële $x > 0$, is streng monotoon en wel isotoon voor $n > 0$ en antitoon voor $n < 0$.

Dit bewijst men voor natuurlijke n door volledige inductie en daarna direct voor negatieve n .

(13.17) De functie x^n gedefinieerd in $(0, \infty)$ heeft een omkeersfunctie, die we $x^{\frac{1}{n}}$ noemen (dus $(x^{\frac{1}{n}})^n = x$ en $(x^n)^{\frac{1}{n}} = x$), gedefinieerd op $(0, \infty)$, die continu en streng monotoon is.

Bewijs. Uit (13.14), (13.16) en (13.10) volgt alles, behalve het feit dat het

definitie interval van $x^{\frac{1}{n}}$ het interval $(0, \infty)$ is. Dit volgt echter uit het feit, dat uit $x > 0$ volgt $x^n > 0$, uit $n > 0$ en $x > 1$ volgt $x^n > x$, uit $n > 0$ en $x < 1$ volgt $x^n < x$, uit $n < 0$ en $x > 1$ volgt $x^n < \frac{1}{x}$ en uit $n < 0$ en $x < 1$ volgt $x^n > \frac{1}{x}$.

Fast men (13.17) toe voor $n=2$, dan vindt men opnieuw het bestaan van $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

We definieren voor p geheel, q natuurlijk, a reëel > 0 nu $a^{\frac{p}{q}}$ door $a^{\frac{p}{q}} = (a^{\frac{1}{q}})^p$. Dit geeft een definitie van a^r voor rationale r , wegens:

(13.18) Als p en s geheel zijn, q en t natuurlijk, a reëel > 0 en $pt = qs$ dan is $(a^{\frac{p}{q}})^{\frac{1}{t}} = (a^{\frac{s}{t}})^{\frac{1}{q}}$.

Bewijs: $((a^{\frac{p}{q}})^{\frac{1}{t}})^{qt} = (((a^{\frac{p}{q}})^{\frac{1}{q}})^t)^q = (a^{\frac{p}{q}})^t = a^{pt} = a^{qs} = (a^{\frac{s}{t}})^q = (((a^{\frac{s}{t}})^{\frac{1}{q}})^t)^q = ((a^{\frac{s}{t}})^{\frac{1}{q}})^{qt}$. Omdat x^{qt} een eeneenduidige functie is, volgt hieruit $(a^{\frac{p}{q}})^{\frac{1}{t}} = (a^{\frac{s}{t}})^{\frac{1}{q}}$.

(13.19) Voor r en s rationaal, a en b reëel > 0 geldt:

$$a^r a^s = a^{r+s},$$

$$a^r b^r = (ab)^r,$$

$$\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r,$$

$$(a^r)^s = a^{rs}.$$

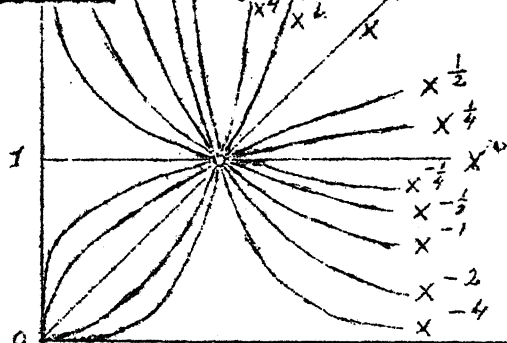
Opgave 58. Bewijs (13.19).

(13.20) De functie x^r (r rationaal), gedefinieerd in $(0, \infty)$, is continu.

Bewijs: Stel $r = \frac{p}{q}$ (p geheel, q natuurlijk). Stel verder een rij a_n met $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ($a_n > 0$, $a > 0$). Dan is $a^p = (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)^p = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^p$ en $a^r = (a^{\frac{p}{q}})^{\frac{1}{q}} = (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{\frac{p}{q}})^{\frac{1}{q}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^{\frac{p}{q}})^{\frac{1}{q}} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{\frac{p}{q}} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^r$.

(13.21) De functie x^r (r rationaal $\neq 0$), gedefinieerd in $(0, \infty)$, is stren monotoon en wel isotoon als $r > 0$ en antitoon als $r < 0$.

Opgave 59. Bewijs (13.21).



De grafieken van de functie x^r voor diverse r zien er uit als hiernaast geschetst.

We hebben nu a^b gedefinieerd in de volgende gevallen: b natuurlijk, a complex; b geheel, a complex $\neq 0$; b rationaal,

a reëel > 0 . Hierbij bleven de bekende rekenregels voor machten bewaard.

We willen de definitie nu ook voor reële exponenten uitbreiden. Dit zal in de volgende paragraaf geschieden.

Opgave 60. Schets van de functie $\varphi(x) = \min(x - [x], [x] + 1 - x)$ de grafiek en bewijs dat de functie continu is (Het is de afstand van een reëel getal tot het dichtst bijzijnde gehele getal).

Opgave 61. De functie $\psi(x) = \varphi(\frac{1}{x})$, gedefinieerd voor x reëel $\neq 0$, is continu, maar het is onmogelijk $\psi(0)$ zo te definiëren, dat $\psi(x)$ in 0 continu is. Definieert men echter $\chi(x) = x\psi(x)$ voor $x \neq 0$ en $\chi(0) = 0$, dan is $\chi(x)$ continu voor alle reële x . Bewijs dit. Schets grafieken van de functies.

Opgave 62. Bewijs, met gebruikmaking van het feit dat voor positieve reële x geldt $\sin x < x$, en verder van de bekende goniometrische eigenschappen van $\sin$ en $\cos$, dat $\sin x$ en $\cos x$ continue functies zijn. Als men $\psi_1(x) = \sin \frac{1}{x}$ en $\chi_1(x) = x \sin \frac{1}{x}$ definieert, kan men analoge beweringen bewijzen voor $\psi_1(x)$ en $\chi_1(x)$ als voor $\psi(x)$ en $\chi(x)$ in opgave 61. Voer dit uit.

Opgave 63. Als $f(S) = T$ een continue functie is en $b \in T$, dan is de verzameling V der punten $x \in S$, waarvoor $f(x) = b$, gesloten in S . Hieruit volgt direct het volgende (hetgeen we dikwijls zullen toepassen). als

$f(S) = T$ een continue functie is, $a \in S$, $b \in T$ en $f(a) \neq b$, dan is er een omgeving van a , waar $f(x) \neq b$.

Opgave 64. Als $f(S) = T$, $a \in S$, a geen verdichtingspunt van S , dan is f continu in a .

Opgave 65. Een aftelling van de rationale getallen tussen 0 en 1 is een functie met als definitieverzameling de verzameling natuurlijke getallen. Bewijs dat deze functie continu en eeneenduidig is, maar dat de omkeersfunctie niet continu is.

Opgave 66. Stel S een deelverzameling van een n -dimensionale Euclidische ruimte en T een deelverzameling van een m -dimensionale Euclidische ruimte en een functie $f(S) = T$. Deze functie is te interpreteren als een stelsel van m reële functies van n reële veranderlijken als volgt: laat $y = f(x)$, $y = (\eta_i)$, $x = (\xi_k)$ zijn. Dan is $\eta_i = \varphi_i(\xi_k)$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq k \leq n$ zo'n stelsel. Formuleer waar de ϵ - δ -definitie van continuïteit op neer komt voor de functies φ_i . Men formuleert de definitie van continuïteit voor één reële functie van n reële veranderlijken $\varphi(\xi_k)$, ($1 \leq k \leq n$), ook wel als volgt: φ is continu in het punt (α_k) als bij iedere reële $\epsilon > 0$ een reële $\delta > 0$ te vinden is, zodat voor alle (ξ_k) met $|\xi_k - \alpha_k| < \delta$, ($1 \leq k \leq n$), geldt $|\varphi(\xi_k) - \varphi(\alpha_k)| < \epsilon$. Bewijs, dat deze definitie toegepast op de functies φ_i ($1 \leq i \leq m$) op hetzelfde neerkomt, als onze algemene continuïteits definitie.

§14. Exponentiële en logaritmische functies.

We willen nu a^b ook voor reële b gaan definiëren. We beschouwen daartoe de functie $f(x) = a^x$ voor vaste reële $a > 0$. Dit is een reële functie, gedefinieerd voor rationale x .

(14.1) De functie a^x is monotoon en wel voor $a > 1$ streng isotoon, voor $a = 1$ constant en voor $0 < a < 1$ streng antitoon.

Bewijs: Het geval $a = 1$ is evident. Stel $a > 1$, dan is $a^n > 1$ voor natuurlijke n . Voor gehele m en n met $m > n$ geldt $a^{m-n} > 1$, dus $a^n < a^{m-n} \cdot a^n = a^m$. Neem nu rationale x en y met $x < y$; $x = \frac{p}{q}$, $y = \frac{r}{s}$, p en r geheel, q en s natuurlijk, dus $ps < qr$. Noem $a^{\frac{1}{q}} = b$ (dus $b^q = a$) en $a^{\frac{1}{s}} = c$ (dus $c^s = a$), dan is $a^{\frac{ps}{qs}} < a^{\frac{qr}{qs}}$, dus $b^{ps} < c^{qr}$. Daar $qs > 0$, volgt hieruit, wegens (13.21), $b^p < c^r$, dus $a^{\frac{p}{q}} = b^p < c^r = a^{\frac{r}{s}} = a^y$. Als $0 < a < 1$ dan is $\frac{1}{a} > 1$; uit $x < y$ volgt dan $\frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x < \left(\frac{1}{a}\right)^y = \frac{1}{a^y}$, dus $a^x > a^y$.

Dat de functie a^x continu is bewijzen we voorlopig nog niet, omdat we dit later meteen voor reële x zullen doen. We zullen proberen de definitie van a^x voor reële x zo op te stellen, dat de functie continu wordt en verder voor rationale x met de bekende a^x overeenstemt. Daartoe nemen we voor een reële x een rij x_n rationale getallen met $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ (dit kan wegens (8.35)) en definiëren $a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n}$, waarin a^{x_n} de bekende uitkomst voor rationale exponenten is. Om deze definitie evenwel te rechtvaardigen moeten er drie dingen aangetoond worden:

- 1° de limiet in de definitie bestaat;
- 2° de limiet is onafhankelijk van de keuze van de rij;
- 3° voor rationale x stemt de nieuw gedefinieerde a^x met de bekende overeen.

We zullen dit nu via enkele hulpstellingen bewijzen.

(14.2) Voor reële $\lambda > -1$ en natuurlijke n geldt:

$$(1 + \lambda)^n \geq 1 + n\lambda \text{ (ongelijkheid van Bernoulli).}$$

Opgave 67. Bewijs (14.2).

(14.3) Voor reële $a > 0$ geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$.

Bewijs: Voor $a = 1$ is het evident. Stel $a > 1$, dan is, wegens (14.1), $a^{\frac{1}{n}}$ een streng antitone naar beneden begrensde rij ($a^{\frac{1}{n}} > a^0 = 1$), die, wegens (8.42), convergent is en, wegens (11.18), met een limiet ≥ 1 . Stel $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = b > 1$; noem $b = 1 + \lambda$, dan is $\lambda > 0$, dus voor alle n geldt $a^{\frac{1}{n}} > 1 + \lambda$, dus $a > (1 + \lambda)^n$, maar voor $n > \frac{a-1}{\lambda}$ is $1 + n\lambda > a$, hetgeen een tegenspraak geeft. Dus $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$. Als $0 < a < 1$, dan is $\frac{1}{a} > 1$, dus $1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}}$, dus $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$.

(14.4) Als de rij rationale getallen x_n convergent is (met een reële limiet), dan is voor reële $a > 0$, de rij a^{x_n} convergent.

Bewijs: Het geval $a=1$ is evident. Stel $a > 1$. Omdat x_n convergent is, is x_n begrensd, dus er is een rationaal getal c zodat $x_n < c$, dus $a^{x_n} < a^c$ voor alle n . Bij een $\varepsilon > 0$ kiezen we N_1 zodat voor $k > N_1$ geldt $0 < a^{\frac{1}{k}} - 1 < \frac{\varepsilon}{a^c}$ en een N_2 zodat voor $k > N_2$ geldt $0 < 1 - a^{-\frac{1}{k}} =$

$= 1 - \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{K}} < \frac{\varepsilon}{a^c}$. Noem $K = \max(N_1, N_2) + 1$, dan is er omdat x_n een fundamen-
taalrij is, een N_3 zodat voor $m > N_3$, $n > N_3$ geldt $|x_m - x_n| < \frac{1}{K}$, dus
 $a^{-\frac{1}{K}} < a^{x_m - x_n} < a^{\frac{1}{K}}$ dus $1 - a^{x_m - x_n} < 1 - a^{-\frac{1}{K}} < \frac{\varepsilon}{a^c}$ en $a^{x_m - x_n} - 1 < \frac{1}{a^{\frac{1}{K}}} - 1 < \frac{\varepsilon}{a^c}$, dus $|1 - a^{x_m - x_n}| < \frac{\varepsilon}{a^c}$. Maar nu is $|a^{x_m} a^{x_n}| = |a^{x_n}| |a^{x_m - x_n}|$
 $< a^c \frac{\varepsilon}{a^c} = \varepsilon$. Dus a^{x_n} is een fundamenteaalrij, dus convergent. Als

$0 < a < 1$, dan is $\frac{1}{a} > 1$, dus $\frac{1}{a^{x_n}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{x_n}$ is convergent met limiet $\neq 0$
(want $\left(\frac{1}{a}\right)^{x_n} > \left(\frac{1}{a}\right)^{-c} > 0$ als $|x_n| < c$), dus a^{x_n} is convergent.

(14.5) Als x_n en y_n rijen rationale getallen zijn, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$
en a reëel > 0 , dan is $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{y_n}$.

Bewijs: Definieer een rij z_n door $z_{2m} = x_m$, $z_{2m-1} = y_m$. Bij een $\varepsilon > 0$
is een N_1 zodat voor $n > N_1$ geldt $|x - x_n| < \varepsilon$ en een N_2 zodat voor $n > N_2$
geldt $|x - y_n| < \varepsilon$. Stel $N = 2 \max(N_1, N_2)$; voor $n > N$ en $n = 2m$ geldt dan
 $m > N_1$ en $|x - z_n| = |x - x_m| < \varepsilon$ en voor $n > N$ en $n = 2m-1$ geldt $m > N_2$ en $|x - z_n| =$
 $= |x - y_m| < \varepsilon$. Dus $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = x$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{z_n}$ bestaat. Omdat a^{x_n} een deelrij is van
 a^{z_n} is $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{z_n}$ en omdat a^{y_n} een deelrij is van a^{z_n} is $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{y_n} =$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{z_n}$. Dus $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{y_n}$.

Hiermee zijn 1^x en 2^x afgehandeld. 3^x is nu echter direct duidelijk,
want als x zelf rationaal is kan men voor de rij rationale getallen x_n
die naar x convergeert, eenvoudig de constante rij $x_n = x$ nemen, waaruit
 3^x onmiddellijk volgt. Hiermee is a^b gedefinieerd voor b reëel en a reëel > 0
(14.6) Defunctie a^x gedefinieerd voor reële x is monotoon en wel voor
 $a > 1$ streng isotoon, voor $a = 1$ constant, voor $0 < a < 1$ streng antitoon.

Bewijs: Voor $a = 1$ is dit evident. Stel $a > 1$, en twee reële getallen
 x en y met $x < y$. Kies twee rationale getallen r en s , zodat $x < r < s < y$
en verder een rij rationale getallen x_n met $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ en een rij ratio-
nale getallen y_n met $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$. Dan is, wegens (14.1), $a^r < a^s$. Verder
is er een N_1 zodat voor $n > N_1$ geldt $|x - x_n| < r - x$, dus $x_n < r$ en een N_2 zodat
voor $n > N_2$ geldt $|y - y_n| < y - s$, dus $y_n > s$. Voor $n > \max(N_1, N_2)$ geldt dan
 $a^{x_n} < a^r$ en $a^{y_n} > a^s$, dus $a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} < a^r < a^s < \lim_{n \rightarrow \infty} a^{y_n} = a^y$. Als $0 < a < 1$,
dan is $\frac{1}{a} > 1$. Verder volgt uit de definitie direct dat $\frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$. Als nu
 $x < y$, dan $\frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x < \left(\frac{1}{a}\right)^y = \frac{1}{a^y}$, dus $a^x > a^y$.

(14.7) De functie a^x gedefinieerd voor reële x is continu; verder is
 $a^x > 0$.

Bewijs: Voor $a = 1$ is dit evident. Stel $a > 1$. Dat $a^x > 0$ voor alle x

is duidelijk.

kies een rationale $s < x$, dan is $0 < a^s < a^x$. Nu de continuïteit in het punt b . Bij $\varepsilon > 0$ is een N_1 zodat voor $k > N_1$ geldt $a^{\frac{1}{k}} - 1 < \frac{\varepsilon}{a^b}$ en N_2 zodat voor $k > N_2$ geldt $1 - a^{-\frac{1}{k}} = 1 - \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{k}} < \frac{\varepsilon}{a^b}$. Noem $K = \max(N_1, N_2) +$

$+ 1$ en kies $\delta = \frac{1}{K}$; voor $|x - b| < \delta$ geldt dan $a^{-\frac{1}{K}} < a^{x-b} < a^{\frac{1}{K}}$,

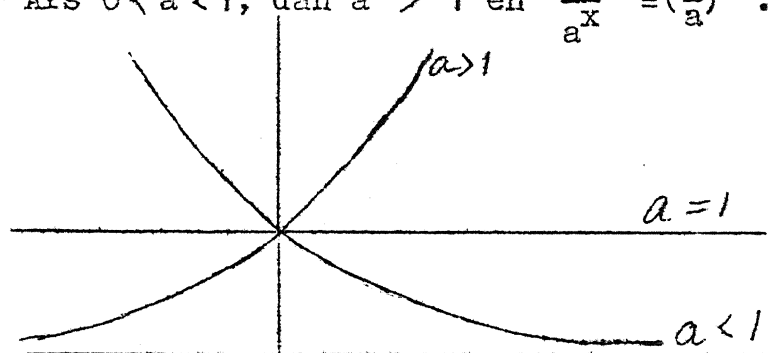
dus $a^{x-b} - 1 < a^{\frac{1}{K}} - 1 < \frac{\varepsilon}{a^b}$ en $1 - a^{x-b} < 1 - a^{-\frac{1}{K}} < \frac{\varepsilon}{a^b}$, dus

$$|a^{x-b} - 1| < \frac{\varepsilon}{a^b}. \text{ Dus}$$

Als $0 < a < 1$, dan $\frac{1}{a} > 1$ en $\frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$. Ook dan is dus $a^x > 0$ en continu.

$$|a^b - a^x| = a^b |a^{x-b} - 1| < a^b \frac{\varepsilon}{a^b} = \varepsilon.$$

De grafieken van de functie a^x voor waarden van $a > 1$, $= 1$ en < 1 zien er uit als hiernaast is geschetst.



(14.8) Voor a en b reëel > 0 en c en d reëel geldt

$$a^c a^d = a^{c+d}$$

$$a^c b^c = (ab)^c$$

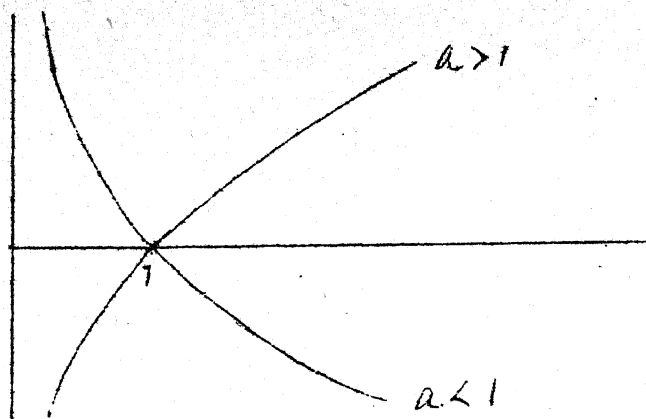
$$\frac{a^c}{b^c} = \left(\frac{a}{b}\right)^c$$

$$(a^c)^d = a^{cd}.$$

Opgave 68. Bewijs (14.8).

Uit (14.6) en (14.7) volgt, dat we op de functie a^x voor $a \neq 1$ de omkeerstelling (13.10) kunnen toepassen. We gaan eerst na dat het definitie-interval van de omkeersfunctie het interval $(0, \infty)$ is. Dit is zo, want als $a > 1$, is voor $K > 1$ en een natuurlijk getal $n > \frac{K-1}{a-1}$, $a^n = \{1 + (a-1)\}^n \gg 1 + n(a-1) > K$ en verder $a^{-m} = \frac{1}{a^m} < \frac{1}{K}$ (als $a^m > K$). Als $a < 1$, dan volgt het uit $a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$ (waarom?). We noemen de omkeersfunctie a^x nu ${}_a \log x$ (de logarithme van x bij grondtal of basis a). Hiervoor geldt dus:

(14.9) De functie ${}_a \log x$ gedefinieerd op $(0, \infty)$ is een streng monotone, reële continue functie, waarvoor geldt $a^{{}_a \log x} = x$ en ${}_a \log a^x = x$.



De grafieken van ${}_a \log x$ voor waarden van $a > 1$ en $a < 1$ zien er uit als hiernaast is geschetst. In de praktijk beperkt men zich steeds tot grondtallen $a > 1$. In dat geval is de logarithmische functie streng isotoon.

(14.10) Voor a en b reëel > 0 en $\neq 1$ en x en y reëel > 0 en z reëel geldt

$${}_a \log xy = {}_a \log x + {}_a \log y$$

$${}_a \log x^z = z {}_a \log x$$

$${}_a \log x = \frac{{}_b \log x}{{}_b \log a}.$$

Opgave 69. Bewijs (14.10).

Historisch zijn de logarithmen anders ontstaan, n.l. uit het streven om vermenigvuldiging van getallen terug te brengen tot optelling van aan die getallen toegevoegde hulpgetallen. Aan 1 moet dan natuurlijk 0 toegevoegd worden.

Voegt men aan 2 nu 1 toe dan komt er $\left\{ \begin{array}{l} 1 ; 2 ; 4 ; 8 \\ 0 ; 1 ; 2 ; 3 \end{array} \right.$ enz. Om dit te verfijnen kan men het als volgt doen:

Of nog fijner: $\left\{ \begin{array}{l} 1 ; 1,1 ; 1,21 ; 1,331 \\ 0 ; 0,1 ; 0,2 ; 0,3 \end{array} \right.$ enz. $\left\{ \begin{array}{l} 1 ; 1,01 ; 1,0201 ; 1,0303... ; 1,0406... \\ 0 ; 0,01 ; 0,02 ; 0,03 ; 0,04 \end{array} \right.$ enz.

Door de mazen verder te verfijnen wordt het systeem steeds bruikbaar. De toegevoegde getallen zijn logarithmen waarvan het grondtal bepaald wordt uit ${}_a \log (1 + \frac{1}{10^k}) = \frac{1}{10^k}$, dus $a^{\frac{1}{10^k}} = 1 + \frac{1}{10^k}$, dus $a = (1 + \frac{1}{10^k})^{10^k}$.

Uit theoretisch oogpunt is er geen reden om de machten van 10 te bevorrechten, dus men kan nemen $a = (1 + \frac{1}{n})^n$ voor grote n . Het ligt voor de hand als grondtal te nemen $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$. Daartoe moeten we eerst aantonen, dat deze limiet bestaat.

(14.11) De rij $(1 + \frac{1}{n})^n$ is convergent met een limiet die tussen 2 en 4 ligt.

Bewijs. Noem $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ en $b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$, dan is natuurlijk $a_n < b_n$. We bewijzen nu dat a_n een streng isotone en b_n een streng anti-tone rij vormt. Er geldt namelijk

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n > 1 - \frac{n}{(n+1)^2} > 1 - \frac{n}{n^2+2n} =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n+1}}, \text{ en hieruit volgt } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Verder is.

$$\left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n+1}}\right)^{n+1} = \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} > 1 + \frac{n+1}{n(n+2)} > 1 + \frac{n+1}{(n+1)^2} =$$

$$= 1 + \frac{1}{n+1}, \text{ en hieruit volgt } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}. \text{ Dus vormt}$$

a_n een streng isotone rij die begrensd is wegens $a_n < b_n < b_1 = 4$. Dus a_n is convergent en de limiet is $> a_1 = 2$ en $< b_2 < b_1 = 4$.

We noemen de limiet e (het grondtal van de natuurlijke logarithmen), dus

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Bij de natuurlijke logarithmen schrijven we de basis niet: $\log x$ betekent $^e \log x$. Dus er geldt $\log e^x = x$ en $e^{\log x} = x$. Verder is $^a \log x = \frac{\log x}{\log a}$, dus logarithmen met willekeurig grondtal a zijn in natuurlijke logarithmen uit te drukken. Evenzo is een willekeurige macht a^x uit te drukken als macht van e , want uit $a = e^{\log a}$ volgt $a^x = (e^{\log a})^x = e^{x \log a}$.

Opgave 70. Bewijs $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = e$.

Opgave 71. Van een continue reële functie $f(x)$ gedefinieerd voor alle reële x zij gegeven, dat $f(x+y) = f(x) + f(y)$ en $f(1) = 1$. Bewijs dat $f(x) = x$ (Doe het achtereenvolgens voor natuurlijke, gehele, rationale en reële x).

Opgave 72. Van een continue reële functie $f(x)$ gedefinieerd voor alle reële x zij gegeven, dat $f(x+y) = f(x)f(y)$ en $f(1) = e$. Bewijs dat $f(x) = e^x$.

§15 Uniforme convergentie en uniforme continuïteit.

We beschouwen een rij functies $f_n(x)$ en voeren daarvoor het begrip convergent in. Stel alle functies $f_n(x)$ gedefinieerd op dezelfde metrische ruimte S met als beeldverzamelingen deelverzamelingen van dezelfde metrische ruimte T , dus $f_n(S) \subset T$. We zeggen, dat deze rij functies in het punt $a \in S$ convergeert, als de rij punten $f_n(a)$ convergeert, d.w.z. als er een $b \in T$ bestaat, zodat bij iedere $\varepsilon > 0$ een N te vinden is,

zodat voor alle $n > N$ geldt $\rho(b, f_n(a)) < \xi$. Als de rij functies in alle punten $a \in S$ convergeert, zeggen we kortweg, dat de rij functies convergeert. De bij iedere a zo gevonden limiet $b \in T$ geeft weer een functie $f(a) = b$, die de limietfunctie heet:

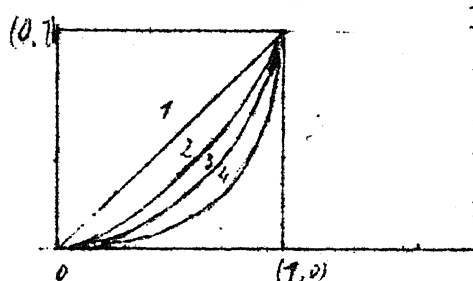
Een rij functies $f_n(x)$ heet convergent met limietfunctie $f(x)$ als bij iedere $x \in S$ en iedere $\xi > 0$ een N te vinden is, zodat voor $n > N$ geldt $\rho(f(x), f_n(x)) < \xi$. De N in deze definitie hangt van ξ en x af! We schrijven dit wel $N(\xi, x)$.

Men zou nu kunnen denken, dat als de functies $f_n(x)$ alle continu zijn, $f(x)$ ook continu is. We zullen nu door een tegenvoorbeeld aantonen, dat dit niet het geval behoeft te zijn. Daartoe bewijzen we eerst de volgende hulpstelling:

(15.1) Voor a reëel, $0 < a < 1$, geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$.

Bewijs: Het volgt direct uit hetgeen we in de vorige paragraaf over de functie a^x bewezen hebben, n.l. dat a^x streng antitoem is en alle waarden op $(0, a)$ aanneemt.

We beschouwen we nu de rij functies $f_n(x) = x^n$ gedefinieerd op $[0, 1]$



Deze is voor iedere x op dit interval convergent en wel voor $0 \leq x < 1$ met limiet 0 en voor $x = 1$ met limiet 1; de limietfunctie $f(x)$ is dus $f(x) = 0$ voor $0 \leq x < 1$, $f(1) = 1$.

De functies $f_n(x)$ zijn alle continu, maar $f(x)$ is het niet. Dit komt omdat, naarmate we dichterbij 1 komen, de rij weliswaar nog wel naar 0 convergeert, maar steeds "slechter"; anders gezegd bij gegeven ξ is het niet mogelijk N onafhankelijk van a te kiezen: neem een ξ met $0 < \xi < 1$, een natuurlijke n en $a = \frac{n-1+\xi}{n}$, dan is $0 < a < 1$, en $a^n = \left\{1 + (a-1)\right\}^n \geq 1 + n(a-1) = \xi$. Er is dus geen N te vinden onafhankelijk van x zodat voor $n > N$ geldt $x^n < \xi$ voor alle $x \in [0, 1]$.

Een rij functies $f_n(x)$ heet uniform convergent of gelijkmatig convergent met limietfunctie $f(x)$ als bij iedere $\xi > 0$ een N te vinden is, zodat voor alle $n > N$ en alle $x \in S$ geldt $\rho(f(x), f_n(x)) < \xi$. De N in deze definitie hangt niet van x af!

(15.2) Als de rij functies $f_n(x)$ uniform convergeert naar $f(x)$ en alle functies $f_n(x)$ zijn continu in het punt a , dan is $f(x)$ continu in het punt a .

Bewijs: Bij een $\xi > 0$ is wegens de uniforme convergentie een N te vinden zodat voor alle $n > N$ en alle $x \in S$ geldt $\rho(f(x), f_n(x)) < \frac{\xi}{3}$. Kies nu een vaste m met $m > N$ en beschouw de functie $f_m(x)$. Omdat deze continu in a is, is er een $\delta > 0$ te vinden zodat voor alle $x \in S$ met $\rho(a, x) < \delta$ geldt $\rho(f_m(a), f_m(x)) < \frac{\xi}{3}$. Voor deze x met $\rho(a, x) < \delta$

geldt, dus

$$\rho(f(a), f(x)) \leq \rho(f(a), f_m(a)) + \rho(f_m(a), f_m(x)) + \rho(f_m(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \text{ Hiermee is bij iedere } \varepsilon > 0 \text{ een } \delta > 0 \text{ gevonden zodat uit } \rho(a, x) < \delta \text{ volgt } \rho(f(a), f(x)) < \varepsilon, \text{ dus } f(x) \text{ is continu in } a.$$

Voor het geval in $f_n(S) \subseteq T$ een Euclidische ruimte is (of algemeen een ruimte waarin de convergentiestelling van Cauchy geldt) bewijzen we nog de volgende stelling:

(15.3) Een rij functies $f_n(S) \subseteq T$ (in T geldt de convergentiestelling van Cauchy) is dan en slechts dan uniform convergent als bij iedere $\varepsilon > 0$ een $N(\varepsilon)$ te vinden is, zodat voor alle m en n met $m > N$ en $n > N$ en alle $x \in S$ geldt $\rho(f_m(x), f_n(x)) < \varepsilon$ (men zou kunnen zeggen dat de functies dan een uniforme fundamentealrij vormen).

Bewijs: 1° Stel de rij functies is uniform convergent. Dan is bij

$\varepsilon > 0$ een N te vinden zodat voor alle $n > N$ en alle $x \in S$ geldt

$$\rho(f(x), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{2}. \text{ Als } m > N \text{ en } n > N, \text{ dan geldt dus } \rho(f_m(x), f_n(x)) \leq$$

$$\rho(f_m(x), f(x)) + \rho(f(x), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2° Stel nu dat de rij functies een uniforme fundamentealrij is. Dan is bij $\varepsilon > 0$ een $N_1(\varepsilon)$ te vinden, zodat voor $m > N_1$, $n > N_1$ en alle $x \in S$ geldt $\rho(f_m(x), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Verder is voor iedere $x \in S$ de rij $f_n(x)$ een fundamentealrij, dus volgens Cauchy convergent, dus $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$.

Neem nu een willekeurige $x \in S$, dan is daarbij een $N_2(\varepsilon, x)$ te vinden, zodat voor $m > N_2$ geldt $\rho(f(x), f_m(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Kies nu $n > N_1$ en $m > \max(N_1, N_2)$, dan is

$$\rho(f(x), f_n(x)) \leq \rho(f(x), f_m(x)) + \rho(f_m(x), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \text{ Bij iedere } \varepsilon > 0 \text{ is dus een } N_1(\varepsilon) \text{ gevonden zodat voor}$$

$n > N_1$ en alle $x \in S$ geldt $\rho(f(x), f_n(x)) < \varepsilon$. Daarmee is de uniforme convergentie aangetoond.

Bij de continuïteit doet zich een analoog verschijnsel voor, als hierboven bij de convergentie is besproken. Een functie $f(x)$ is continu als voor alle $a \in S$ en alle $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ te vinden is, zodat uit $\rho(a, x) < \delta$ volgt $\rho(f(a), f(x)) < \varepsilon$. De δ kan hierin echter behalve van ε ook van het beschouwde punt a afhangen.

Neem b.v. de functie $\frac{1}{x}$ op $[0, 1]$. Deze is, zoals we weten, continu: bij $\varepsilon > 0$ is een $\delta > 0$ te vinden zodat uit $|x - a| < \delta$ volgt $|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}| < \varepsilon$.

Deze δ kan niet onafhankelijk van a gekozen worden: bepaal n.l. een y zodat $\frac{1}{y} = \frac{1}{a} + \varepsilon = \frac{1 + \varepsilon a}{a}$, $y = \frac{a}{1 + \varepsilon a}$, $a - y = \frac{\varepsilon a^2}{1 + \varepsilon a}$. Dus moet zeker

$$\delta < \frac{\varepsilon a^2}{1 + \varepsilon a} \text{ zijn. Als men nu echter } a \text{ een rij laat doorlopen, die naar nul}$$

convergeert, doorloopt δ ook een rij die naar nul convergeert; het is dus onmogelijk bij een bepaalde ε de δ voor alle a gemeenschappelijk te kiezen.

Een functie $f(S) \subseteq T$ heet uniform continu als bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ te vinden is zodat voor alle $x \in S$ en $y \in S$ met $\rho(x, y) < \delta$ geldt

$$\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

(15.4) Als de definitieverzameling van een continue functie compact is, dan is de functie uniform continu.

Bewijs: Stel dat de functie $f(x)$ niet uniform continu is. Dan is er een $\varepsilon_0 > 0$ waarbij rijen $x_n \in S$ en $y_n \in S$ bestaan met $\rho(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$, zodat $\rho(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0$. Omdat S compact is, bevat x_n een convergente deelrij $x_{\varphi(n)}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{\varphi(n)} = x$; verder bevat $y_{\varphi(n)}$ een convergente deelrij $y_{\psi(\varphi(n))}$, dus $\lim_{n \rightarrow \infty} y_{\psi(\varphi(n))} = y$, maar dan ook $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{\psi(\varphi(n))} = x$. Omdat $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_{\psi(\varphi(n))}, y_{\psi(\varphi(n))}) = 0$, geldt $x = y$. Omdat f continu is in x , is $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{\psi(\varphi(n))}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_{\psi(\varphi(n))}) = f(x)$, in strijd met het feit, dat voor alle n geldt $\rho(f(x_{\psi(\varphi(n))}), f(y_{\psi(\varphi(n))})) \geq \varepsilon_0$. Dus $f(x)$ is uniform continu.

§ 16. Continue limietovergangen.

Als een functie $f(x)$ continu is in het punt a dan is van iedere rij die naar a convergeert de rij der beeldpunten convergent naar $f(a)$. Men drukt dit wel uit door te schrijven: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Het linkerlid hiervan kan evenwel zin hebben, zonder dat het gelijk is aan $f(a)$, ja zelfs zonder dat a tot de definitieverzameling van $f(x)$ behoort te behoren. In het laatste geval moeten we eisen dat de elementen van de rijen die naar a convergeren alle $\neq a$ zijn en dat doen we nu ook algemeen:

Als $f(S) \subset T$, $S \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, a een verdichtingspunt van S (dat tot S mag behoren, maar niet hoeft te behoren), dan definiëren we dat $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

bestaat, als voor iedere rij a_n met $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ en $a_n \neq a$ voor alle n geldt dat $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$ bestaat, en wel is $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$. Deze definitie wordt gerechtvaardigd, doordat er een dergelijke rij a_n bestaat (hetgeen zo is omdat a verdichtingspunt van S is) en doordat voor alle dergelijke rijen $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$ dezelfde is (hetgeen we nu zullen bewijzen).

(16.1) Als $f(S) \subset T$, $S \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, a verdichtingspunt van S , en voor iedere rij $a_n \in S$ met $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ en $a_n \neq a$ voor alle n geldt dat $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$ bestaat, dan is voor alle dergelijke rijen $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$ dezelfde.

Bewijs: (Het verloopt volgens hetzelfde schema als het bewijs van (14.5)). Stel rijen a_n en b_n met $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$, $a_n \neq a$ en $b_n \neq a$ voor alle n . Noem $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = s$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = t$, dan moet $s = t$ bewezen worden. Vorm een nieuwe rij c_n door het voorschrift $c_{2m} = a_m$, $c_{2m-1} = b_m$, dan bewijst men analoog als bij (14.5), dat $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$. Volgens het gegeven bestaat dan $\lim_{n \rightarrow \infty} f(c_n)$, maar omdat $f(a_n)$ een deelrij is van $f(c_n)$ geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(c_n) = s$ en omdat $f(b_n)$ een deelrij is van $f(c_n)$ geldt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(c_n) = t, \text{ dus } s = t.$$

Men bedenke dat volgens de nu gegeven definitie, als $f(x)$ gedefinieerd is op S en $b \in S$ maar b geen verdichtingspunt van S (en dus $f(x)$ continu in b ; zie opgave 64) $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ niet bestaat!

We kunnen voor $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ een andere karakterisering geven, die overeenkomt met de $\varepsilon - \delta$ - definitie van continuïteit:

(16.2) Als $f(S) \subset T$, $S \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, a verdichtingspunt van S , dan bestaat $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ dan en slechts dan als er een $b \in T$ bestaat zodat uit $x \in S$, $x \neq a$, $\rho(a, x) < \delta$ volgt $\rho(b, f(x)) < \varepsilon$; dan is $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Bewijs: 1° Stel dat de $\varepsilon - \delta$ - voorwaarde vervuld is. Definieer een nieuwe functie $g(x)$ met als definitieverzameling S_1 , waarvoor geldt $S_1 = S$ als $a \in S$ en S_1 bestaat uit de punten van S en het punt a als $a \notin S$, door $g(x) = f(x)$ als $x \in S$ en $x \neq a$ en $g(a) = b$, dan is $g(x)$ continu in a , want het gegeven is nu juist de $\varepsilon - \delta$ - definitie van continuïteit van $g(x)$, behoudens de voorwaarde $x \neq a$, maar als $x = a$ dan is

$\rho(g(a), g(a)) = 0 < \varepsilon$. Daar a verdichtingspunt van S_1 is, bestaat $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, dus ook $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, want voor $x \neq a$ is $f(x) = g(x)$.

2° Stel dat $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ bestaat. Definieer een nieuwe functie $h(x)$ met als definitieverzameling S_1 als bij 1°, door $h(x) = f(x)$ als $x \in S$ en $x \neq a$ en $h(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, dan is $h(x)$ continu in a . Het bewijs dat de $\varepsilon - \delta$ - definitie vervuld is is geheel analoog aan het tweede deel van het bewijs van (13.1); voor de daar geconstrueerde rij x_n geldt n.l. $x_n \neq a$. Daaruit volgt de te bewijzen $\varepsilon - \delta$ - voorwaarde met $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, want voor $x \neq a$ is $f(x) = h(x)$.

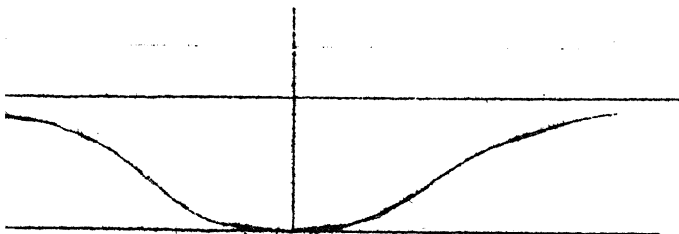
Uit het bewijs van (16.2) volgt nog, dat als $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ bestaat, er de volgende drie mogelijkheden bestaan:

1° $a \in S$ en $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$; dan is $f(x)$ continu in a .

2° $a \in S$ en $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$. Dan heet a een verwijderbare discontinuïteit van $f(x)$, want de functie $h(x)$ gedefinieerd door $h(x) = f(x)$ voor $x \in S$ en $x \neq a$ en $h(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ is wel continu in a .

3° $a \notin S$. Dan kan de functie $f(x)$ continu voortgezet (of uitgebreid) worden in a , want de functie $h(x)$ gedefinieerd door $h(x) = f(x)$ voor $x \in S$ en $h(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ is continu in a .

Als $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ niet bestaat, heet a een essentiële discontinuïteit van $f(x)$. Het is dan niet mogelijk de definitie van f in a zo te veranderen (als $a \in S$) of uit te breiden (als $a \notin S$), dat de functie in a continu wordt. Voorbeelden van essentiële discontinuïteiten vindt men in opgaven 61 en 62.



Een voorbeeld van een functie die continu voortgezet kan worden is de functie $e^{-\frac{1}{x^2}}$. Deze is gedefinieerd voor alle reële $x \neq 0$. Daar $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$ bestaat en 0 is de functie in 0 voort te zetten met waarde 0 .

Opgave 73. Bewijs dat $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}}$ bestaat en $= 0$.

Voor een reële functie $f(x)$ gedefinieerd op een verzameling S die niet naar boven begrensd is zeggen we dat $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ bestaat, als voor

iedere rij $a_n \in S$ met $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ geldt dat $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$ bestaat. Evenals boven bewijst men dan dat deze limiet onafhankelijk is van de gekozen rij en dat $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ dan en slechts dan bestaat als er een b bestaat zodat bij iedere $\varepsilon > 0$ een K te vinden is zodat uit $x \in S$ en $x > K$ volgt $|b - f(x)| < \varepsilon$; dan is $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Analooft gaat $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Verder nu voor reële functies in de definitie van $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ bij het bestaan van $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$ ook $+\infty$ en $-\infty$ als waarde toelaten. Het analoog van (16.1) blijft dan geldig.

Opgave 74. Bewijs het bestaan en de waarde van $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log x$.

Voor reële functies definiëren we ook "continu van links" in een punt a door eenvoudig de punten $x > a$ niet meer te tellen:

Een reële functie $f(x)$ gedefinieerd op S is continu van links in het punt $a \in S$ als de functie $g(x)$ gedefinieerd op $S \cap (-\infty, a]$ en daar $= f(x)$ continu is in a .

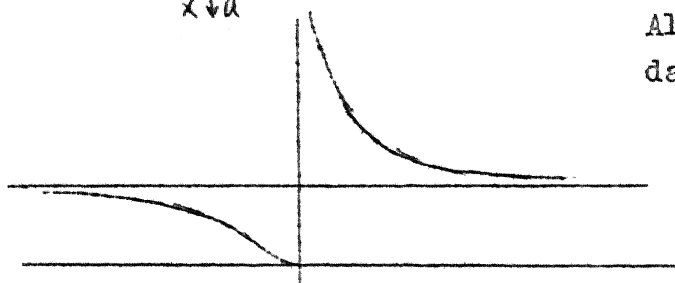
Analooft definieert men continu van rechts.

(16.3) Een reële functie $f(x)$ gedefinieerd op S is dan en slechts dan continu in $a \in S$ als zij in a zowel continu van links als van rechts is.

Bewijs: Dat uit de continuïteit in a de continuïteit van links en van rechts volgt is duidelijk. Stel nu $f(x)$ continu van links en van rechts in a . Dan is er bij $\varepsilon > 0$ een $\delta_1 > 0$ te vinden zodat uit $x \in S, x < a$ en $|a - x| < \delta_1$ volgt $|f(a) - f(x)| < \varepsilon$ en een $\delta_2 > 0$ zodat uit $x \in S, x > a$, $|x - a| < \delta_2$ volgt $|f(a) - f(x)| < \varepsilon$. Noem $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ dan volgt uit $|x - a| < \delta$ dat $|f(a) - f(x)| < \varepsilon$ (ook voor $x = a$).

Verder kunnen we ook continue limietovergangen van links en van rechts beschouwen: als de reële functie $f(x)$ gedefinieerd op S is, het reële getal a een verdichtingspunt is van $S \cap (-\infty, a]$, dan zeggen we dat $\lim_{x \uparrow a} f(x)$ bestaat als voor iedere rij $a_n \in S$, met $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ en $a_n < a$ voor alle n , $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$ bestaat. Hierover en over het verband met continuïteit van links zijn weer analoge stellingen te bewijzen als boven over $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ en het verband met continuïteit. Men schrijft wel $\lim_{x \uparrow a} f(x) = f(a-)$. Analooft $\lim_{x \downarrow a} f(x) = f(a+)$.

Als voorbeeld kunnen we nemen $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ dan is $f(0-) = 0$ en $f(0+) = +\infty$.



Als voor de reële functie $f(x)$ gedefinieerd op S en voor a verdichtingspunt van S geldt, dat of a geen verdichtingspunt van $S \cap (-\infty, a]$ is of $f(a-)$ bestaat en dat of a geen verdichtingspunt van $S \cap [a, +\infty)$ is of $f(a+)$ bestaat en dat als $f(a-)$ en $f(a+)$ beide bestaan, $f(a-) \neq f(a+)$, dan zeggen we dat de functie f in a een sprong vertoont.

(16.4) Een reële monotone functie heeft geen andere discontinuïteiten dan sprongen.

Bewijs: Stel de functie isotoon. Neem een $a \in S$. Als a verdichtingspunt is van $S \cap (-\infty, a]$ dan bestaat er een rij $a_n \in S$ met $a_n < a$ voor alle n en $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Dan is ook een isotone rij $b_n \in S$ met $b_n < a$ voor alle n en $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ (waarom?). Dan is $f(b_n)$ een isotone rij die begrensd is wegens $f(b_n) \leq f(a)$, dus convergeert met limiet $s \leq f(a)$. Nu is $f(x) \leq s$ voor alle $x \in S$ met $x < a$, want er is een n waarvoor $a - b_n < a - x$, dus $x < b_n$ dus $f(x) \leq f(b_n) \leq s$. Neem een willekeurige rij $c_n \in S$ met $c_n < a$ voor alle n en $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$. Bij $\varepsilon > 0$ is een m te vinden zodat $0 \leq s - f(b_m) < \varepsilon$, en hierbij een N , zodat voor $n > N$ geldt $a - c_n < a - b_m$, dus $c_n > b_m$ dus $f(c_n) \geq f(b_m)$, dus $0 \leq s - f(c_n) \leq s - f(b_m) < \varepsilon$, dus $|f(c_n) - s| < \varepsilon$. Dus $f(a-)$ bestaat en is $\leq f(a)$. Analoog $f(a+)$ bestaat en is $\geq f(a)$. Als $f(a-) = f(a+)$, dan is dit ook $= f(a)$, dus f is in a continu van links en van rechts, dus continu. Als f antitoon is, gaat het hele bewijs analoog.

Opgave 75. Bewijs $\lim_{x \downarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}} = 0$, $\lim_{x \uparrow 0} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}}$ bestaat niet.

Opgave 76. Bereken $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 6}{3x^3 - x^2}$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{2x^2 - x - 1}$.

We willen nu nog $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x$ bepalen. We weten al, dat $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$. Neem een rij x_k met $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = +\infty$ en neem een natuurlijk getal n_k met $n_k \leq x_k < n_k + 1$. dan is blijkbaar ook $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = +\infty$. Nu is wegens de monotonie van de functies x^c en c^x :

$$(1 + \frac{1}{x_k})^{x_k} \leq (1 + \frac{1}{n_k})^{x_k} < (1 + \frac{1}{n_k})^{n_k + 1} = (1 + \frac{1}{n_k})^{n_k} (1 + \frac{1}{n_k}),$$

$$(1 + \frac{1}{x_k})^{x_k} > (1 + \frac{1}{n_k + 1})^{x_k} \geq (1 + \frac{1}{n_k + 1})^{n_k} = (1 + \frac{1}{n_k + 1})^{n_k + 1} (1 - \frac{1}{n_k + 2}),$$

$$\text{maar } \lim_{k \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n_k + 2}) = 1, \lim_{k \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n_k})^{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n_k + 1})^{n_k + 1} =$$

$$= e, \lim_{k \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n_k}) = 1,$$

$$\text{dus } \lim_{k \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x_k})^{x_k} = e, \text{ dus } \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e.$$

Opgave 77. Bewijs $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$.

(16.5) Als $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ bestaat, dan bestaat $\lim_{x \downarrow 0} f(\frac{1}{x})$ en $= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; als $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ bestaat, dan bestaat $\lim_{x \uparrow 0} f(\frac{1}{x})$ en $= \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Opgave 78. Bewijs (16.5).

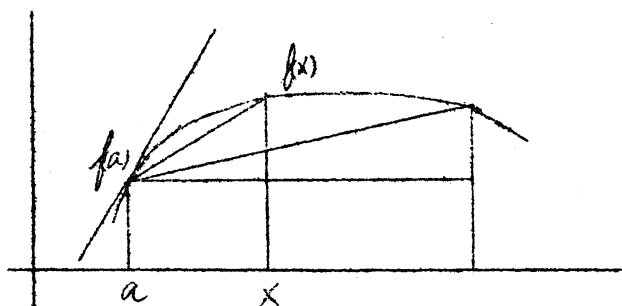
Hieruit volgt dat $\lim_{x \downarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \uparrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. Als we een functie $f(x)$ definiëren door $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ voor $x \neq 0$ en $f(0) = e$ dan is deze continu van links en rechts in 0, dus continu in 0, dus $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. Uit de continuïteit van $\log x$ in e volgt dan $\lim_{x \rightarrow 0} \log (1+x)^{\frac{1}{x}} = \log e$, dus

$$(16.6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

Opgave 79. Bereken $\lim_{x \downarrow 1} \{\log \log x - \log(x-1)\}$.

§17. Differentieerbare functies.

We gaan aan functies verdergaande beperkingen opleggen. We beschouwen een kromme, die de grafiek van een functie $f(x)$ is en eisen dat die



kromme in het punt $P=(a, f(a))$ een raaklijn heeft. Een raaklijn is de limietstand waartoe een koorde door P nadert als het andere snijpunt met de kromme ook tot P nadert. De richtingscoëfficiënt van de koorde door P en $(x, f(x))$ is $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ en

dit moet dus een limiet hebben voor $x \rightarrow a$.

We definiëren nu het begrip wat algemener, ook voor complexe functies, waarvoor hetzelfde betekenis van dit begrip niet zo in het oog vallend is.

Laat $f(x)$ een complexe functie zijn (d.w.z. $f(S) \subset T$ met S en T verzamelingen complexe getallen) en laat a een verdichtingspunt van S zijn, dan heet $f(x)$ differentieerbaar in a , als $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$ bestaat.

Men kan dit ook zo uitdrukken: $f(x)$ is differentieerbaar in a als $\varphi(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (het differentiequotiënt) continu uitgebreid kan worden in het punt a .

De limiet heet de afgeleide of het differentiaalquotiënt van $f(x)$ in a . Het wordt geschreven $\left[\frac{d f(x)}{dx} \right]_{x=a}$ of $[f'(x)]_{x=a}$ of wat korter, maar minder duidelijk $\frac{d f(a)}{dx}$ of $f'(a)$.

Als $f(x)$ overal in S differentieerbaar is, zeggen we kortweg, dat $f(x)$ differentieerbaar is; dan is de afgeleide weer een functie van x , die we $\frac{d f(x)}{dx}$ of $f'(x)$ schrijven.

We kunnen op grond van (16.2) de differentieerbaarheidsvoorwaarde ook in de $\varepsilon - \delta$ -gedaante schrijven: Bij iedere $\varepsilon > 0$ is een $\delta > 0$ te vinden zodat voor alle $x \in S$ met $x \neq a$ en $|x-a| < \delta$ geldt $\left| \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a) \right| < \varepsilon$.

< ε . Hetgeen in deze betrekking tussen de absoluutstrepen staat is een functie die tot nul nadert als x tot a nadert. Een dergelijke functie noemen we $\xi(x \rightarrow a)$; als we de functie voor $x = a$ gelijk aan 0 nemen, is dit een functie die continu in a is met waarde 0. Dan is dus $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) = \xi(x \rightarrow a)$ voor $x \neq a$, en daaruit volgt (en dat nu ook voor $x = a$):

(17.1) Een functie $f(x)$ is dan en slechts dan differentieerbaar in a als er een getal $f'(a)$ en een functie $\xi(x \rightarrow a)$ bestaat zodat

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + (x-a) \xi(x \rightarrow a).$$

Met een analoge schrijfwijze kunnen we ook uitdrukken, dat $f(x)$ continu is in a , n.l. $f(x) = f(a) + \xi(x \rightarrow a)$.

(17.2) Als $f(x)$ differentieerbaar is in a , is $f(x)$ continu in a .

Bewijs: $f(x) = f(a) + (x-a) \{f'(a) + \xi(x \rightarrow a)\}$. Nu is $\lim_{x \rightarrow a} \{f'(a) + \xi(x \rightarrow a)\} = f'(a)$ en $\lim_{x \rightarrow a} (x-a) = 0$, dus $(x-a) \{f'(a) + \xi(x \rightarrow a)\} = \xi_1(x \rightarrow a)$. Dus $f(x)$ is continu in a .

Het omgekeerde van (17.2) geldt niet, want voor reële x is $f(x) = |x|$ (hoe ziet de grafiek er uit?) continu in 0 , maar niet differentieerbaar want voor $x > 0$ is $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x}{x} = 1$ en voor $x < 0$ is $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{-x}{x} = -1$.

(17.3) De som van twee in a differentieerbare functies $f(x)$ en $g(x)$, gedefinieerd op dezelfde verzameling S , is differentieerbaar in a en de afgeleide is $f'(a) + g'(a)$ (we schrijven dit $\frac{d(f(x) + g(x))}{dx} = \frac{d f(x)}{dx} + \frac{d g(x)}{dx}$).

Bewijs: $f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + (x-a) \xi_1(x \rightarrow a)$,
 $g(x) = g(a) + (x-a) g'(a) + (x-a) \xi_2(x \rightarrow a)$.

Door optellen verkrijgt men

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= f(a) + g(a) + (x-a) \{f'(a) + g'(a)\} + (x-a) \{\xi_1(x \rightarrow a) + \xi_2(x \rightarrow a)\} \\ &= f(a) + g(a) + (x-a) \{f'(a) + g'(a)\} + (x-a) \xi_3(x \rightarrow a). \end{aligned}$$

(17.4) Als $f(x)$ differentieerbaar is in a en c is een constant complex getal, dan is $cf(x)$ differentieerbaar in a met afgeleide $cf'(a)$.

(Dus $\frac{d c f(x)}{dx} = c \frac{d f(x)}{dx}$).

Bewijs: $f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + (x-a) \xi(x \rightarrow a)$

Dus: $cf(x) = cf(a) + (x-a)cf'(a) + (x-a)c\xi(x \rightarrow a)$
 $= cf(a) + (x-a)cf'(a) + (x-a)\xi_1(x \rightarrow a)$.

Door combinatie van (17.3) en (17.4) vindt men:

(17.5) Het verschil van twee in a differentieerbare functies $f(x)$ en $g(x)$, gedefinieerd op dezelfde verzameling S , is differentieerbaar in a en de afgeleide is $f'(a) - g'(a)$ (Dus $\frac{d(f(x) - g(x))}{dx} = \frac{d f(x)}{dx} - \frac{d g(x)}{dx}$).

(17.6) Het product van twee in a differentieerbare functies $f(x)$ en $g(x)$, gedefinieerd op dezelfde verzameling S , is differentieerbaar in a en de afgeleide is $f(a) g'(a) + f'(a) g(a)$.

(Dus $\frac{d f(x) g(x)}{dx} = f(x) \frac{d g(x)}{dx} + \frac{d f(x)}{dx} g(x)$).

Bewijs: $f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + (x-a) \xi_1(x \rightarrow a)$,
 $g(x) = g(a) + (x-a) g'(a) + (x-a) \xi_2(x \rightarrow a)$.

Dus $f(x)g(x) = f(a)g(a) + (x-a)\{f(a)g'(a) + f'(a)g(a)\} +$
 $+(x-a)\{(x-a)f'(a)\xi_2(x \rightarrow a) + (x-a)g'(a)\xi_1(x \rightarrow a) + f(a)\xi_2(x \rightarrow a) +$
 $+g(a)\xi_1(x \rightarrow a) + (x-a)f'(a)g'(a) + (x-a)\xi_1(x \rightarrow a)\xi_2(x \rightarrow a)\} =$

$$=f(a)g(a)+(x-a)\{f(a)g'(a)+f'(a)g(a)\}+(x-a)\varepsilon_3(x\rightarrow a).$$

(17.7) Een constante functie is differentieerbaar met afgeleide 0, de identieke functie eveneens met afgeleide 1.

Bewijs: Differentiequotienten zijn resp. $\frac{c-c}{x-a} = 0$ en $\frac{x-a}{x-a} = 1$.

(17.8) $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$ voor gehele n ; voor $n \leq 0$ moet $x \neq 0$ zijn. (Dit houdt

$$\text{in } \frac{d}{dx} \frac{1}{x^m} = -\frac{m}{x^{m+1}} \text{ voor natuurlijke } m \text{ en } x \neq 0).$$

Bewijs: Voor natuurlijke n door volledige inductie. Voor $n=1$ volgt het uit (17.7).

$\frac{dx^{n+1}}{dx} = \frac{d(x^n \cdot x)}{dx} = x^n \cdot 1 + n x^{n-1} \cdot x = (n+1)x^n$; $\frac{dx^0}{dx} = \frac{d1}{dx} = 0$. Voor negatieve n stellen we $n = -m$ en passen volledige inductie naar m toe:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{a} = -\frac{1}{ax} \text{ en dit nadert tot } -\frac{1}{a^2} \text{ voor } x \rightarrow a; \text{ dus } \frac{dx^{-1}}{dx} = -x^{-2}.$$

$$\text{Nu } \frac{dx^{-(m+1)}}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{1}{x^{m+1}} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^m} \cdot \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{x^m} \left(-\frac{1}{x^2} \right) + \left(-\frac{m}{x^{m+1}} \right) \frac{1}{x} = \frac{-(m+1)}{x^{m+2}}.$$

$$\text{Hieruit vindt men nu voor een polynoom: } \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^n a_k x^k \right) = \sum_{k=0}^n k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k.$$

(17.9) Als $f(x)$ eeneenduidig is en differentieerbaar in a en $f'(a) \neq 0$ en de omkeersfunctie $g(y)$ is continu in $f(a)$, dan is $g(y)$ differentieerbaar in $f(a)$ en de afgeleide is $\frac{1}{f'(a)}$. (Als we schrijven $y=f(x)$ en $x=g(y)$, dan is $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$).

Bewijs: Noem $f(x) = y$ en $f(a) = b$, dan is $g(y) = x$ en $g(b) = a$. Daar g continu in b is volgt uit $y \rightarrow b$ dat $x \rightarrow a$ en met de eeneenduidigheid volgt uit $y \neq b$ dat $x \neq a$ is. Dus

$$\frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{f(x)-f(a)} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{g(y)-g(b)}{y-b}.$$

We merken op, dat de voorwaarde in (17.9) dat $g(y)$ continu in $f(a)$ is automatisch vervuld is als $f(x)$ een reële functie is, die op een interval gedefinieerd is.

(17.10) (Kettingregel). Als $g(x)$ differentieerbaar is in a en $f(y)$ gedefinieerd op de beeldverzameling van $g(x)$ en differentieerbaar in $g(a)$, dan is $f(g(x))$ differentieerbaar in a en $\frac{d f(g(a))}{dx} =$

$$= \left[\frac{d f(y)}{dy} \right]_{y=g(x)} \frac{d g(a)}{dx}. \text{ (Als we schrijven } y = g(x) \text{ en } z = f(y) = f(g(x))$$

$$\text{dan is } \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}.$$

Bewijs: Noem $g(a) = b$, dan is

$$g(x) = b + (x-a) g'(a) + (x-a) \varepsilon_1(x \rightarrow a),$$

$$f(y) = f(b) + (y-b) f'(b) + (y-b) \varepsilon_2(y \rightarrow b),$$

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(b) + (g(x)-b) f'(b) + (g(x)-b) \varepsilon_2(g(x) \rightarrow b) = f(b) + (x-a) g'(a) f'(b) + \\ &+ (x-a) f'(b) \varepsilon_1(x \rightarrow a) + (x-a) g'(a) \varepsilon_2(g(x) \rightarrow b) + (x-a) \varepsilon_2(g(x) \rightarrow b) \varepsilon_1(x \rightarrow a) = \\ &= f(g(a)) + (x-a) f'(b) g'(a) + (x-a) \{ f'(b) \varepsilon_1(x \rightarrow a) + g'(a) \varepsilon_2(g(x) \rightarrow b) + \\ &+ \varepsilon_1(x \rightarrow a) \varepsilon_2(g(x) \rightarrow b) \}. \end{aligned}$$

Omdat $g(x)$ continu in a is, volgt uit $x \rightarrow a$ dat $g(x) \rightarrow b$, dus:

$$f(g(x)) = f(g(a)) + (x-a) f'(b) g'(a) + (x-a) \varepsilon_3(x \rightarrow a).$$

(17.11) Als $g(x)$ differentieerbaar is in a en $g(a) \neq 0$, dan is $\frac{1}{g(x)}$ differentieerbaar in a en de afgeleide is $-\frac{g'(a)}{\{g(a)\}^2}$.

Bewijs: Omdat $g(x)$ continu is in a en $g(a) \neq 0$ is er een omgeving van a , waar $g(x) \neq 0$ (zie opgave 63). Door toepassing van de kettingregel met $f(y) = \frac{1}{y}$, volgt het gestelde makkelijk.

(17.12) Het quotiënt $\frac{f(x)}{g(x)}$ van twee in a differentieerbare functies $f(x)$ en $g(x)$, gedefinieerd op dezelfde verzameling S en waarvoor $g(a) \neq 0$ is differentieerbaar in a met afgeleide $\frac{g(a)f'(a) - f(a)g'(a)}{\{g(a)\}^2}$.

Opgave 80. Bewijs (17.12).

$$(17.13) \frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x} \text{ voor } x > 0.$$

Bewijs: Noem $h = \frac{x-a}{a}$, dan is $\frac{\log x - \log a}{x-a} = \frac{\log\{a(1+h)\} - \log a}{ah} = \frac{1}{a} \frac{\log(1+h)}{h}$. Als $x \rightarrow a$, dan $h \rightarrow 0$, maar $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(1+h)}{h} = 1$, dus $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\log x - \log a}{x-a} = \frac{1}{a}$.

$$(17.14) \frac{d e^x}{dx} = e^x \text{ voor reële } x.$$

Bewijs: De omkeersfunctie van $x = \log y$ is $y = e^x$ en deze is continu dus $\frac{d e^x}{dx} = \frac{1}{\frac{d \log y}{dy}} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = e^x$.

$$(17.15) \frac{d a^x}{dx} = a^x \log a \text{ voor reële } x \text{ en } a \text{ reëel en } > 0.$$

Bewijs: $a^x = e^{x \log a}$. Pas hierop de kettingregel toe.

$$(17.16) \frac{d x^\alpha}{dx} = \alpha x^{\alpha-1} \text{ voor reële } x > 0 \text{ en } \alpha \text{ reëel.}$$

Opgave 81. Vul het bewijs van (17.15) aan en bewijs (17.16)

We merken op, dat (17.16) precies dezelfde formule geeft als bij gehele exponenten. Voor gehele exponenten hadden we het echter ook bewezen voor complexe $x \neq 0$.

Opgave 82. Bewijs, uitgaande van het feit dat voor $0 < x < \frac{1}{2} \pi$ geldt $\sin x < x < \tan x$, dat $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (denk ook om de negatieve waarden van x).

Bewijs met behulp hiervan, dat $\frac{d \sin x}{dx} = \cos x$ en $\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$.

Opgave 83. Bewijs dat de functie $\chi(x)$ van opgave 61 niet differentieerbaar is in 0, maar dat de functie $x^2 \psi(x) = x \chi(x)$ wel differentieer-

baar is in 0.

Opgave 84. Bewijs analoge beweringen voor de functies $\lambda_1(x)$ en $x\lambda_1(x)$ van opgave 62.

Opgave 85. Bepaal de afgeleiden van $\frac{1}{1+x^2}$, $\sqrt{x^2+1} - x$, x^x , $\lg x$, $\log \sqrt{1-x^2}$, $\log(-x)$, $\log \log x$, $\sin^3 x - 3 \sin x$, $\log \lg x$, $e^{\sin(\cos x)}$.

Als $f(x)$ differentieerbaar is, dan is de afgeleide $f'(x)$ weer een functie van x ; als deze differentieerbaar is (in een punt), dan zeggen we dat $f(x)$ twee maal differentieerbaar is (in dat punt) en noemen we de afgeleide van $f'(x)$ de tweede afgeleide van $f(x)$: $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = f''(x)$.

Analoog definieert men de n^e afgeleide van $f(x)$: $\frac{d^n f(x)}{dx^n} = f^{(n)}(x)$ door

volledige inductie, mits zij bestaat. Als de n^e afgeleide van $f(x)$ bestaat voor alle natuurlijke n , heet $f(x)$ willekeurig vaak (of oneindig vaak) differentieerbaar.

Opgave 86. Bepaal de n^e afgeleide van $\log(1+x)$, $(1+x)^x$, $\sin x$, $\cos x$.

We kunnen ons nu afvragen of $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ tot de afgeleide $f'(a)$ nadert,

als x en y beide tot a naderen. In het algemeen hoeft dat niet het geval te zijn. (Voorbeelden geven de functies $x\lambda_1(x)$ van opgave 83 en $x\lambda_1(x)$ van opgave 84). Tel geldt het als steeds a tussen x en y ligt:

(17.17) Als $f(x)$ differentieerbaar is in a , $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$, en $x_n \neq y_n$, a tussen x_n en y_n voor alle n , dan bestaat $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}$ en $= f'(a)$ (We zouden dit als volgt kunnen schrijven $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow a \\ x \neq y \\ a \text{ tussen } x \text{ en } y}} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(a)$; hierbij behoeven x en y niet $\neq a$ te zijn!)

Bewijs: $a = \lambda_n x_n + (1 - \lambda_n) y_n$ met λ_n reëel en $0 \leq \lambda_n \leq 1$. Dus $\frac{y_n - a}{y_n - x_n} = \lambda_n$ en $\frac{a - x_n}{y_n - x_n} = 1 - \lambda_n$. Als nu $x_n \neq a$ en $y_n \neq a$, dan geldt

$$\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} - f'(a) = \frac{f(y_n) - f(a)}{y_n - a} \cdot \frac{y_n - a}{y_n - x_n} + \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \cdot \frac{a - x_n}{y_n - x_n} - f'(a) =$$

$$= \lambda_n \frac{f(y_n) - f(a)}{y_n - a} + (1 - \lambda_n) \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} - f'(a) = \lambda_n \left\{ \frac{f(y_n) - f(a)}{y_n - a} - f'(a) \right\} + (1 - \lambda_n) \left\{ \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} - f'(a) \right\}.$$

Bij $\varepsilon > 0$ is een $\delta > 0$ zodat uit $|x - a| < \delta$ en $x \neq a$ volgt $\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right| < \varepsilon$. Verder bij $\delta > 0$ een N_1 zodat voor $n > N_1$ geldt $|x_n - a| < \delta$ en een N_2 zodat voor $n > N_2$ geldt $|y_n - a| < \delta$. Kies $N = \max(N_1, N_2)$; voor $n > N$, $x_n \neq a$, $y_n \neq a$ geldt dan:

$$\left| \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} - f'(a) \right| \leq \left| \lambda_n \left| \frac{f(y_n) - f(a)}{y_n - a} - f'(a) \right| + (1 - \lambda_n) \left| \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} - f'(a) \right| \right|$$

$< \varepsilon$. Is echter $n > N$ en hetzij $x_n = a$, hetzij $y_n = a$ dan volgt direct

$$\left| \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} - f'(a) \right| < \varepsilon.$$

(17.18) Stel C is een willekeurige verzameling, $f(x)$ is gedefinieerd op C en differentieerbaar, dan zijn de verzamelingen der $\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|$ voor $x \in C$, $y \in C$, $x \neq y$ en der $|f'(\xi)|$ voor $\xi \in C$ of beide onbegrensd of er geldt:

$$\sup_{\substack{x \in C \\ y \in C \\ x \neq y}} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = \sup_{\xi \in C} |f'(\xi)|.$$

Bewijs: Noem het linkerlid (resp. rechterlid) van de te bewijzen betrekking als het bestaat L (resp. N). Stel dat de verzameling der $\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|$ begrensd is en die der $|f'(\xi)|$ hetzij onbegrensd hetzij begrensd met $N > M$. Dan zijn er een $K > N$ en een $\xi \in C$ te vinden zodat $|f'(\xi)| > K$. Verder is er een $x \in C$ met

$$\left| \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} - f'(\xi) \right| < K - M. \text{ Dan is } \left| \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \right| > |f'(\xi)| - (K - M) = M.$$

hetgeen een tegenspraak geeft, dus $N \leq M$. Stel nu dat de verzameling der $|f'(\xi)|$ begrensd is en die der $\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|$ hetzij onbegrensd

hetzij begrensd met $M > N$. Dan zijn er een $L > N$ en $x \in C$, $y \in C$ met $x \neq y$ zodat $\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| > L$. Nu behoort $z = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$ ook tot C en $\frac{x - z}{x - y} = \frac{1}{2}$ en $\frac{z - y}{x - y} = \frac{1}{2}$.

$$\text{Verder is } \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{f(x) - f(z)}{x - z} \cdot \frac{x - z}{x - y} + \frac{f(z) - f(y)}{z - y} \cdot \frac{z - y}{x - y} = \frac{1}{2} \frac{f(x) - f(z)}{x - z} + \frac{1}{2} \frac{f(z) - f(y)}{z - y},$$

dus $\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| < \frac{1}{2} \left| \frac{f(x) - f(z)}{x - z} \right| + \frac{1}{2} \left| \frac{f(z) - f(y)}{z - y} \right|$. Als $\left| \frac{f(x) - f(z)}{x - z} \right|$ en $\left| \frac{f(z) - f(y)}{z - y} \right|$ beide $< L$ waren was ook $\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| < L$, hetgeen niet het

geval is. Minstens een van beide is dus $> L$. Als het de eerste is, noemen we $x_1 = x$, $y_1 = z$, als het de tweede is, $x_1 = z$, $y_1 = y$. Met x_1, y_1 gaan we nu op dezelfde wijze verder. Zo vinden we met volledige inductie x_n en y_n zodat x_n tussen x_{n-1} en y_{n-1} , y_n tussen x_{n-1} en y_{n-1} ,

$$\left| \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} \right| > L. \text{ We bewijzen nu, dat } x_n \text{ tussen } x \text{ en } y \text{ en } y_n \text{ tussen } x \text{ en } y$$

ligt en als we $x_n = \lambda_n x + (1 - \lambda_n)y$ en $y_n = \mu_n x + (1 - \mu_n)y$ stellen dat $\lambda_n - \mu_n = \frac{1}{2^n}$ is en λ_n (resp. μ_n) een antitone (resp. isotone) rij vormen. Er geldt $\lambda_1 = \mu_1 = \frac{1}{2}$ of $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\mu_1 = 0$ zodat voor $n = 1$ de beweringen juist zijn. Stel nu de beweringen juist voor n . Dan is de eerste mogelijkheid $x_{n+1} = x_n$, dus $\lambda_{n+1} = \lambda_n$ en $y_{n+1} = \frac{1}{2} x_n + \frac{1}{2} y_n = \frac{1}{2} (\lambda_n + \mu_n)x + \left\{ 1 - \frac{1}{2} (\lambda_n + \mu_n) \right\} y$, dus $\mu_{n+1} = \frac{1}{2} (\lambda_n + \mu_n)$ en $0 < \mu_{n+1} < 1$. $\lambda_{n+1} - \mu_{n+1} =$

$$= \frac{1}{2} (\lambda_n - \mu_n) = \frac{1}{2^{n+1}}, \mu_{n+1} > \mu_n. \text{ De tweede mogelijkheid is } x_{n+1} = y_n.$$

$x_{n+1} = \frac{1}{2} x_n + \frac{1}{2} y_n = \frac{1}{2} (\lambda_n + \mu_n) x + \left\{ 1 - \frac{1}{2} (\lambda_n + \mu_n) \right\} y$, dus $\lambda_{n+1} = \frac{1}{2} (\lambda_n + \mu_n)$
 en $0 \leq \lambda_{n+1} \leq 1$, en $y_{n+1} = y_n$, dus $\mu_{n+1} = \mu_n$, dus $\lambda_{n+1} - \mu_{n+1} = \frac{1}{2} (\lambda_n - \mu_n) =$
 $= \frac{1}{2^{n+1}}$, $\lambda_{n+1} < \lambda_n$. Omdat λ_n (resp. μ_n) een begrensde antitone (resp. iso-

tone) rij vormt, is deze rij convergent en wel, wegens $\lambda_n - \mu_n = \frac{1}{2^n}$, voor
 λ_n en μ_n met dezelfde limiet λ , die wegens $0 \leq \lambda_n \leq 1$ voldoet aan
 $0 \leq \lambda \leq 1$. Dus x_n en y_n convergeren naar dezelfde limiet $\xi = \lambda x + (1 - \lambda) y$,
 die tussen x en y ligt. Op dezelfde wijze bewijst men dat ξ tussen x_m
 en y_m ligt voor alle m , door in plaats van x en y van x_m en y_m uit te

gaan. We mogen dus (17.17) toepassen en vinden dat
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} = f'(\xi)$. Omdat voor alle n geldt $\left| \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} \right| \geq L$, geldt

ook $|f'(\xi)| \geq L > N$, hetgeen een tegenspraak geeft. Hiermee zijn alle
 mogelijke gevallen afgehandeld (ga dit na), en is de stelling bewezen.
 (17.19) Als een functie $f(x)$ gedefinieerd is op een convexe verzameling
 en differentieerbaar is met een afgeleide die overal nul is, dan is
 $f(x)$ constant.

Bewijs: $\sup_{\xi \in C} |f'(\xi)| = 0$, dus $\sup_{\substack{x \in C \\ y \in C \\ x \neq y}} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = 0$ dus $\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = 0$

voor alle x en y met $x \neq y$, dus $f(x) = f(y) = \gamma$ constant.

(17.20) Als $f(x)$ en $g(x)$ gedefinieerd zijn op een convexe verzameling
 C en differentieerbaar zijn en $f'(x) = g'(x)$ voor alle $x \in C$, dan is
 er een constante γ zodat $g(x) = f(x) + \gamma$ (Door zijn afgeleide is een
 functie op een additieve constante na bepaald).

Bewijs: Pas (17.19) toe op $h(x) = g(x) - f(x)$.

(17.21) Stel C is een convexe verzameling, $f(x)$ is gedefinieerd op C
 en differentieerbaar, a is een complex getal, dan zijn de verzamelingen
 der $\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} - a \right|$ voor $x \in C, y \in C, x \neq y$ en der $|f'(\xi) - a|$ voor
 $\xi \in C$ of beide onbegrensd of er geldt:

$$\sup_{\substack{x \in C \\ y \in C \\ x \neq y}} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} - a \right| = \sup_{\xi \in C} |f'(\xi) - a|.$$

Bewijs: Pas (17.18) toe op $g(x) = f(x) - ax$; immers $\frac{g(x) - g(y)}{x - y} =$
 $= \frac{f(x) - ax - f(y) + ay}{x - y} = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} - a$ en $g'(x) = f'(x) - a$.

We gebruiken (17.18) meestal in de volgende gedaante:

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq \sup_{\substack{\xi \text{ tussen} \\ x \text{ en } y}} |f'(\xi)|$$

Als $f(x)$ een reële functie is en C dus een interval kan het bewijs
 van (17.18) ook zonder absoluutstroken geleverd worden en het volgende
 verkregen worden:

$$\inf_{\xi \text{ tussen } x \text{ en } y} f'(\xi) \leq \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq \sup_{\xi \text{ tussen } x \text{ en } y} f'(\xi).$$

We kunnen (17.18) nog iets generaliseren als volgt:

(17.22) Stel C is een convexe verzameling, $f(x)$ en $g(x)$ gedefinieerd op C en differentieerbaar, $g(x)$ eeneenduidig en dusdanig dat tussenpunten in tussenpunten overgevoerd worden (d.w.z. uit z tussen x en y volgt dat $g(z)$ tussen $g(x)$ en $g(y)$ ligt) en $g'(x) \neq 0$ voor alle $x \in C$, dan zijn de verzamelingen der $\left| \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} \right|$ voor $x \in C$, $y \in C$, $x \neq y$ en der $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ voor $\xi \in C$ of beide onbegrensd of er geldt

$$\sup_{\substack{x \in C \\ y \in C \\ x \neq y}} \left| \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} \right| = \sup_{\xi \in C} \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \right|.$$

Het bewijs verloopt volgens hetzelfde schema als dat van (17.18).

Immers

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \cdot \frac{x-y}{g(x)-g(y)} \text{ en } \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f(x)-f(z)}{g(x)-g(z)} \cdot \frac{g(x)-g(z)}{g(x)-g(y)} + \frac{f(z)-f(y)}{g(z)-g(y)} \cdot \frac{g(z)-g(y)}{g(x)-g(y)}.$$

Als $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ met $0 \leq \lambda \leq 1$, dan is $g(z) = \mu g(x) + (1-\mu)g(y)$ met $0 \leq \mu \leq 1$ en dus $\frac{g(x)-g(z)}{g(x)-g(y)} = 1-\mu$ en $\frac{g(z)-g(y)}{g(x)-g(y)} = \mu$. We voeren het bewijs niet verder uit.

§18. Reële differentieerbare functies.

We beperken ons in deze paragraaf uitsluitend tot reële functies.

Een reële functie $f(x)$ gedefinieerd op S heet stijgend in $a \in S$, als er een reëel getal $\delta > 0$ bestaat zodat uit $x \in S$, $|x-a| < \delta$ en $x < a$ (resp. $x > a$) volgt $f(x) < f(a)$ (resp. $f(x) > f(a)$).

Analoog dalend met $f(x) > f(a)$ (resp. $f(x) < f(a)$), niet - dalend met $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$), niet-stijgend met $f(x) \geq f(a)$ (resp. $f(x) \leq f(a)$). We zeggen dat $f(x)$ een relatief maximum (resp. relatief minimum) in $a \in S$ heeft, als er een reëel getal $\delta > 0$ bestaat zodat uit $x \in S$ en $|x-a| < \delta$ volgt $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$).

(18.1) Als de reële functie $f(x)$ een maximum (resp. minimum) heeft in a , dan heeft $f(x)$ daar ook een relatief maximum (resp. relatief minimum).

Dit is evident.

(18.2) Als de reële functie $f(x)$ in a niet - dalend (resp. niet - stijgend) en differentieerbaar is, is $f'(a) \geq 0$ (resp. $f'(a) \leq 0$).

Bewijs: Voor $|x-a| < \delta$ is $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$ (resp. ≤ 0).

(18.3) Als de reële functie $f(x)$ in a differentieerbaar is en $f'(a) > 0$

(resp. < 0) dan is $f(x)$ in a stijgend (resp. dalend).

Bewijs: We beschouwen het geval $f'(a) > 0$ (het andere geval gaat analoog): Er is een reële $\delta > 0$ te vinden, zodat uit $|x-a| < \delta$ volgt $\left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \right| < f'(a)$, dus $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$, dus voor $x < a$ is dan $f(x) < f(a)$ en voor $x > a$ is dan $f(x) > f(a)$.

Het verschil in de voorwaarden van (18.2) en (18.3) (die in zekere zin als elkaars omkeringen te beschouwingen zijn) is essentieel; zo kan voor een functie $f(x)$, die stijgend is in a , toch gelden $f'(a) = 0$. B.v. x^3 is stijgend in 0, maar $3x^2$ is daar nul.

(18.4) Als een reële functie $f(x)$ gedefinieerd is op S , $a \in S$ is verdichtingspunt van $S \cap (-\infty, a]$ en $S \cap [a, +\infty)$ (b.v. als S een interval bevat, dat a bevat, maar niet als begin- of eindpunt), $f(x)$ differentieerbaar is in a en in a een relatief maximum of minimum heeft, dan is $f'(a) = 0$.

Bewijs: Laat $f(x)$ in a een relatief maximum hebben (relatief minimum gaat analoog). Dan is er een $\delta > 0$ zodat uit $x \in S$ en $|x-a| < \delta$ volgt $f(x) \leq f(a)$, dus dan als $x > a$ (resp. $x < a$) is $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$ (resp. ≥ 0). Omdat a verdichtingspunt is van $S \cap [a, +\infty)$, geldt $f'(a) = \lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, maar dit is ≤ 0 . Evenzo met $x \uparrow a$, dat $f'(a) \geq 0$. Dus $f'(a) = 0$.

Evident is de volgende stelling:

(18.5) Als een reële functie monotoon stijgend (resp. dalend, niet-dalend, niet - stijgend) is, is zij in ieder punt van haar definitieverzameling stijgend (resp. dalend, niet - dalend, niet - stijgend).

Door combinatie van (18.5) met (18.2) vindt men:

(18.6) Als de reële functie $f(x)$ isotoon (resp. antitoon) en differentieerbaar is, is $f'(x) \geq 0$ (resp. ≤ 0).

Om te kunnen bewijzen, dat uit $f'(x) > 0$ volgt dat $f(x)$ streng isotoon is, hebben we nieuwe hulpmiddelen nodig:

(18.7) (Stelling van Rolle). Als de reële functie $f(x)$ gedefinieerd is op $[a, b]$, daar continu is en op (a, b) differentieerbaar, $f(a) = f(b) = 0$, dan is er een $\xi \in (a, b)$, zodat $f'(\xi) = 0$.

Bewijs: Daar $[a, b]$ een compacte ruimte is en $f(x)$ continu, heeft $f(x)$ een maximum en een minimum. Daar $f(a) = 0$, is het maximum ≥ 0 en het minimum ≤ 0 . Als ze beide $= 0$ zijn is $f(x) = 0$ overal op $[a, b]$, maar dan is ook $f'(x) = 0$ overal op $[a, b]$, dus is ξ nog willekeurig te kiezen op (a, b) . Stel nu het maximum > 0 (het minimum < 0 gaat analoog), dan is het punt ξ , waar $f(\xi)$ maximaal is, niet a of b wegens $f(a) = f(b) = 0$. Op ξ mogen we dus (18.4) toepassen en concluderen dat $f'(\xi) = 0$.

(18.8) (Middelwaardestelling van de differentiaalrekening). Als de reële functie $f(x)$ gedefinieerd is op $[a, b]$, daar continu is en op (a, b) differentieerbaar, dan is er een $\xi \in (a, b)$, zodat $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Bewijs: Noem $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{b-a}(f(b)-f(a))$, dan voldoet $g(x)$

aan de voorwaarden van de stelling van Rolle, dus er is een $\xi \in (a, b)$, zodat $g'(\xi) = 0$, maar $g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, dus $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

(18.9) Als een reële functie $f(x)$ op een interval gedefinieerd en differentieerbaar is, en $f'(x) \neq 0$ voor alle x in het definitieinterval, dan is $f(x)$ eeneenduidig (en dus streng monotoon en dus heeft $f'(x)$ overal hetzelfde teken).

Bewijs: Stel dat er twee getallen a en b met $a \neq b$ zijn, zodat $f(a) = f(b)$ is. Nu is $f(x)$ ook op $[a, b]$ gedefinieerd en wegens (18.8) is er een ξ zodat $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$, hetgeen een tegenspraak geeft. Dus uit $a \neq b$ volgt $f(a) \neq f(b)$; de functie is eeneenduidig. De rest van de bewering volgt uit het feit dat $f(x)$ continu is (17.2), en verder uit (13.9) en (18.6).

Uit (18.9) volgt nog dat als $f(x)$ op een interval gedefinieerd en differentieerbaar is en de afgeleide is ergens negatief en ergens positief, de afgeleide ook ergens nul moet zijn. Dit wijst in de richting van een middelwaardestelling voor de afgeleide analoog die van Weierstrass. Men zou kunnen denken, dat dit komt omdat een afgeleide altijd continu is. Dit is evenwel niet het geval (zie opgave 87); zelfs hoeft de afgeleide in een gesloten interval niet eens begrensd te zijn (zie opgave 88).

Opgave 87. De functie $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ voor reële $x \neq 0$ en $f(0) = 0$ is differentieerbaar (zie opgave 84). De afgeleide is niet continu in 0.

Opgave 88. De functie $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}$ voor reële $x \neq 0$ en $f(0) = 0$ is differentieerbaar. De afgeleide is niet begrensd op $[0, 1]$.

Als een functie differentieerbaar is en de afgeleide is continu dan heet de functie continu differentieerbaar.

Ondanks het feit dat de afgeleide van een functie niet continu behoeft te zijn, geldt toch de volgende middelwaardestelling voor een functie die een afgeleide is:

(18.10) (Stelling van Darboux). Als de reële functie gedefinieerd is op $[a, b]$ en differentieerbaar en r is een getal tussen $f'(a)$ en $f'(b)$ dan is er een $\xi \in [a, b]$, zodat $f'(\xi) = r$.

Bewijs: Noem $f'(a) = p$, $f'(b) = q$. Stel $p < q$ ($p > q$ gaat analoog).

Als $r = p$ of $r = q$ is de stelling evident, Stel dus $p < r < q$. Beschouw de functie $g(x) = f(x) - rx$. Dan is $g(x)$ ook gedefinieerd op $[a, b]$ en differentieerbaar met afgeleide $g'(x) = f'(x) - r$. Dus $g'(a) = f'(a) - r = p - r < 0$ en $g'(b) = f'(b) - r = q - r > 0$. Dus is er, wegens (18.9), een $\xi \in [a, b]$ zodat $g'(\xi) = 0$, dus $f'(\xi) = r$.

De stellingen van Weierstrass en Darboux zijn geheel analoge stellingen voor functies die continu resp. een afgeleide zijn. We zagen al dat een afgeleide niet continu hoeft te zijn; dus omvat de stelling van

Darboux gevallen, die die van Weierstrass niet omvat. In werkelijkheid is de stelling van Weierstrass een bijzonder geval van die van Darboux; we zullen n.l. later in de integraalrekening bewijzen, dat er bij iedere op een interval gedefinieerde continue reële functie $f(x)$ een functie te vinden is waarvan $f(x)$ de afgeleide is.

Opgave 89. Bepaal het minimum van $\sum_{v=1}^n p_v (x-a_v)^2$, waarin alle $p_v > 0$. Bewijs, dat het werkelijk een minimum is.

Opgave 90. Bepaal relatieve maxima en minima van $x^3 - x$.

Op analoge wijze als bij continuïteit geschied is, kunnen we differentieerbaarheid van links en van rechts definiëren. Een functie die in een punt van links en van rechts differentieerbaar is behoeft evenwel niet differentieerbaar te zijn. Zo is de reële functie $|x|$ in 0 van links en van rechts differentieerbaar, maar niet differentieerbaar.

§19. Uniforme en continue differentieerbaarheid.

Als een functie $f(x)$ differentieerbaar is en er geldt dat bij iedere $\eta > 0$ een $\delta > 0$ te vinden is, zodat voor $|x-y| < \delta$ en $x \neq y$ geldt

$$\left| \frac{f(y)-f(x)}{y-x} - f'(x) \right| < \eta$$

dan heet $f(x)$ uniform differentieerbaar (d.w.z. δ hangt alleen van η en niet van x af).

(19.1) Als $f(x)$ uniform differentieerbaar is, is $f'(x)$ uniform continu.

Bewijs: Bij $\eta > 0$ is een $\delta > 0$ te vinden zodat uit $|x-y| < \delta$, $x \neq y$ volgt

$$\left| \frac{f(y)-f(x)}{y-x} - f'(y) \right| < \frac{\eta}{2},$$

maar ook $\left| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} - f'(x) \right| < \frac{\eta}{2},$

dus $|f'(x)-f'(y)| < \eta$.

(19.2) Als $f(x)$ gedefinieerd is op een convexe verzameling C en differentieerbaar en $f'(x)$ is uniform continu, dan is $f(x)$ uniform differentieerbaar.

Bewijs: Uit (17.21) volgt dat voor $x \neq y$ geldt $\left| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} - f'(x) \right| \leq \sup_{\xi \text{ tussen } x \text{ en } y} |f'(\xi) - f'(x)|$. Kies een $\eta > 0$, dan is daarbij een $\delta > 0$ zo-

dat uit $|x-z| < \delta$ volgt $|f'(x)-f'(z)| < \frac{\eta}{2}$. Stel nu $|x-y| < \delta$, als ξ tussen x en y ligt, geldt $|x-\xi| \leq |x-z| + |z-\xi| = |x-y| < \delta$, dus $|f'(\xi) - f'(x)| < \frac{\eta}{2}$, dus $\sup_{\xi \text{ tussen } x \text{ en } y} |f'(\xi) - f'(x)| < \frac{\eta}{2} < \eta$. Dus $\left| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} - f'(x) \right| < \eta$.

We hebben nu nog enkele "meetkundige" hulpstellingen over het complexe vlak nodig.

Drie complexe getallen heten collineair als minstens een van de drie tussen de beide andere ligt.

Als a en b complexe getallen zijn en $a \neq b$ dan heet de verzameling der complexe getallen x , die te schrijven zijn $x = \lambda a + (1-\lambda)b$ met λ

willekeurig reëel, de rechte lijn door a en b.

(19.3) Als a, b, c en d complexe getallen zijn, $a \neq b$, $c \neq d$ en c en d behoren tot ("liggen op") de rechte door a en b dan is de rechte door c en d dezelfde als de rechte door a en b.

(19.4) Als a en b complexe getallen zijn en $a \neq b$, dan bestaat de rechte door a en b uit die en slechts die complexe getallen die collineair zijn met a en b.

Opgave 91. Bewijs (19.3) en (19.4).

(19.5) Stel C een convexe verzameling complexe getallen, $a \in C$ en noem D de verzameling die uit C ontstaat door a eruit weg te laten. Stel verder dat D ook convex is of dat C geen deelverzameling van een rechte lijn is. Laat $f(x)$ gedefinieerd zijn op D en differentieerbaar; verder $f'(x)$ continu uit te breiden in a met waarde b. Dan is $f(x)$ ook continu uit te breiden in a en de uitgebreide functie is differentieerbaar in a met afgeleide b.

Bewijs: Als $x \in D$, $y \in D$, a niet tussen x en y, dan is $\left| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} - b \right| \leq \sup_{\xi \text{ tussen } x \text{ en } y} |f'(\xi) - b|$. Bij iedere $\eta > 0$ is een $\delta > 0$ te vinden zodat uit $\xi \in D$

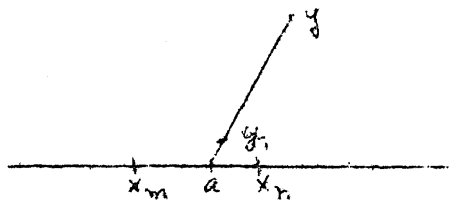
en $|\xi - a| < \delta$ volgt $|f'(\xi) - b| < \frac{\eta}{2}$. Als $|x - a| < \delta$, $|y - a| < \delta$, dan is voor ξ tussen x en y ook $|\xi - a| < \delta$ (waarom?), dus als bovendien $x \in D, y \in D, x \neq y$ en a niet tussen x en y ligt, $\left| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} - b \right| < \frac{\eta}{2}$. Speciaal is er een $\delta_1 > 0$ met $\left| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} - b \right| < 1$ dus $|f(x)-f(y)| < |x-y| (|b| + 1)$. Neem

nu een rij $x_n \in D$ met $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Bij $\varepsilon > 0$ is een N_1 te vinden zodat voor $n > N_1$ geldt $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(|b| + 1)}$ en een N_2 zodat voor $m > N_2, n > N_2$ geldt $|x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2(|b| + 1)}$. Noem $N = \max(N_1, N_2)$ en stel $m > N$ en $n > N$; als $x_m = x_n$, dan is $|f(x_m) - f(x_n)| = 0 < \varepsilon$. Als $x_m \neq x_n$ en a niet tussen x_m en x_n dan is $|f(x_m) - f(x_n)| < |x_m - x_n| (|b| + 1) < \varepsilon$. Als $x_m \neq x_n$ en a tussen x_m en x_n dan is D niet convex; er is dus een $y \in D$ die niet op de rechte door x_m en x_n ligt. Ieder punt $y_1 \neq a$ tussen y en a ligt dan

ook niet op de rechte door x_m en x_n , want anders was de rechte door y_1 en a dezelfde als die door x_m en x_n en y lag wel op de ene en niet op de andere rechte. Verder is $y_1 \in C$ en $y_1 \neq a$, dus $y_1 \in D$. Kies nu een reëel ge-

getal λ zodat $0 < \lambda < \min\left(\frac{\varepsilon}{4|y_1 - a|}, \frac{\varepsilon}{4(|b| + 1)|y_1 - a|}, 1\right)$; dan is $y_1 (= \lambda y) + (1 - \lambda)a$ tussen y en a en $y_1 \neq a$ verder is $|y_1 - a| < \frac{\varepsilon}{4(|b| + 1)}$.

Ten slotte ligt a niet tussen x_m en y_1 (want de rechte door x_m en a kan y_1 niet bevatten) en evenzo ligt a niet tussen x_n en y_1 . Dus is $|f(x_m) - f(x_n)| \leq |f(x_m) - f(y_1)| + |f(y_1) - f(x_n)| < (|x_m - y_1| + |x_n - y_1|) \cdot (|b| + 1) \leq (2|y_1 - a| + |x_m - a| + |x_n - a|)(|b| + 1) = (2|y_1 - a| + |x_m - x_n|) \cdot (|b| + 1) < \varepsilon$. Dus de rij $f(x_n)$ is een fundamenteaalrij, dus convergent.



Daar dit voor alle dergelijke rijen geldt, is $f(x)$ continu uit te breiden in a ; noem de waarde daar c . Dan is als y tussen x en a , $y \neq x$ en $y \neq a$, dus zeker niet a tussen x en y ligt $\lim_{y \rightarrow x} \left(\frac{f(x)-f(y)}{x-y} - b \right) = \frac{f(x)-c}{x-a} - b$. Dus uit $x \in D$ en $|x-a| < \delta$ volgt $\left| \frac{f(x)-c}{x-a} - b \right| < \eta$. Dus de functie $g(x) = f(x)$ voor $x \in D$ en $g(a) = c$ is differentieerbaar in a en $g'(a) = b$.

Dat de eis dat C geen deelverzameling van een rechte lijn is niet gemist kan worden blijkt uit de reële functie $f(x) = 0$ voor $x < 0$ en $f(x) = 1$ voor $x > 0$. Wel kunnen we, als gegeven is dat $f(x)$ continu uit te breiden is in a , de bijvoorwaarden voor de definitieverzameling laten vervallen, daar die alleen gebruikt zijn om te bewijzen, dat $f(x)$ continu uit te breiden is in a . Zo vinden we de volgende stelling: (19.6) Stel C een convexe verzameling complexe getallen, $a \in C$, $f(x)$ gedefinieerd op C , continu en, behalve eventueel in a , differentieerbaar. Als $f'(x)$ continu uit te breiden is in a met waarde b , dan is $f(x)$ ook differentieerbaar in a met afgeleide b .

Opgave 92. Voor reële $\alpha \geq 1$ is x^α (gedefinieerd voor reële $x > 0$) uit te breiden in 0 , zodat de functie daar differentieerbaar is. Bewijs dit.

§20 Rijen differentieerbare functies.

(20.1) Als de functies van een rij $f_n(x)$ gedefinieerd zijn op een vaste convexe verzameling C en differentieerbaar zijn, de rij convergeert in een punt a en de rij der afgeleiden convergeert uniform ($\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = g(x)$), dan convergeert de rij $f_n(x)$ overal in C ($\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$) en $f(x)$ is differentieerbaar met afgeleide $g(x)$ (limietovergang en differentiatie mogen verwisseld worden: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x) = \frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$).

Bewijs: Eerst bewijzen we, dat $f_n(x)$ overal in C convergeert. Voor a is dat gegeven, neem dus $x \neq a$, dan is $|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f'_n(a)(x-a)| + |f'_n(a)(x-a) - f'_m(a)(x-a)| + |f'_m(a)(x-a) - f_m(x)|$. Bij $\varepsilon > 0$ is een N_1 te vinden zodat voor $m > N_1$, $n > N_1$ en alle $\xi \in C$ geldt $|f'_n(\xi) - f'_m(\xi)| < \frac{\varepsilon}{4|x-a|}$, dus $\sup_{\xi \text{ tussen } a \text{ en } x} |f'_n(\xi) - f'_m(\xi)| < \frac{\varepsilon}{4|x-a|} < \frac{\varepsilon}{2|x-a|}$, en een N_2 zodat voor $m > N_2$, $n > N_2$ geldt $|f_n(a) - f_m(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Noem $N = \max(N_1, N_2)$; voor $m > N$ en $n > N$ is dan $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, dus de rij $f_n(x)$ is convergent. Nu bewijzen we de differentieerbaarheid in $b \in C$ met afgeleide $g(b)$. Vorm daartoe de rij functies $\varphi_n(x)$ gedefinieerd door $\varphi_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(b)}{x-b}$ voor $x \neq b$ en $\varphi_n(b) = f'_n(b)$. Dan is $\varphi_n(x)$ continu (ook in b). Bij $\varepsilon > 0$ is een N_3 zodat voor $m > N_3$,

$n > N_3$ en alle $\xi \in C$ geldt $|f'_n(\xi) - f'_m(\xi)| < \frac{\epsilon}{2}$. Voor zulke m en n en $x \neq b$ geldt dan $|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| =$

$$= \left| \frac{f_n(x) - f_m(x)}{x - b} - \frac{f_n(b) - f_m(b)}{x - b} \right| \leq \sup_{\substack{\xi \text{ tussen} \\ b \text{ en } x}} |f'_n(\xi) - f'_m(\xi)| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \quad \text{en}$$

voor $x = b$ geldt $|\varphi_n(b) - \varphi_m(b)| = |f'_n(b) - f'_m(b)| < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$.

Volgens (15.3) is de rij $\varphi_n(x)$ uniform convergent en daar alle functies $\varphi_n(x)$ continu zijn, is de limietfunctie $\varphi(x)$ ook continu. Maar voor $x \neq b$ is $\varphi(x) = \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$ en $\varphi(b) = g(b)$. Dus $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = g(b)$, dus $f'(b) = g(b)$.

Opgave 93. Bereken $\lim_{n \rightarrow \infty} n(x^{\frac{1}{n}} - 1)$ voor reële $x > 0$. (Beschouw de rij van de afgeleiden).

§ 21. Reeksen. Absolute convergentie. Machtreeksen.

Als a_n een rij complexe getallen is, vormen we daarbij de rij $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$. We noemen dan de rij A_n de reeks $\sum a_n$. De a_n heten de termen van de reeks, de A_n de partiële sommen. Als de rij A_n convergeert met limiet A , dan zeggen we dat de reeks $\sum a_n$ convergeert met de som A . We schrijven dan ook $A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Dus $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$. Eigenlijk is de theorie van de reeksen dus in wezen geen nieuwe theorie, daar deze op die van de rijen (n.l. der partiële sommen) terug te brengen is. Omgekeerd is ook iedere rij als een reeks op te vatten. Gaat men n.l. uit van een rij a_n en vormt men hierbij de rij u_n als volgt: $u_1 = a_1$ en $u_n = a_n - a_{n-1}$ voor $n > 1$, dan is $U_1 = u_1 = a_1$ en $U_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_1 + \sum_{k=2}^n u_k = a_1 + \sum_{k=2}^n (a_k - a_{k-1}) = a_1 + \sum_{k=2}^n a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = a_1 + a_n - a_1 = a_n$ voor $n > 1$, dus a_n is juist de rij der partiële sommen van u_n . Het eigen karakter van de theorie ontstaat, doordat we nu de kwesties samenhangende met convergentie in samenhang brengen met de termen van de reeks en niet met de partiële sommen.

Een reeks $\sum a_n$ is convergent met som A als bij iedere $\epsilon > 0$ een N te vinden is zodat voor $n > N$ geldt $|A - \sum_{k=1}^n a_k| < \epsilon$. Maar een reeks is ook dan en slechts dan convergent, als de partiële sommen een fundamentealrij vormen, dus als bij iedere $\epsilon > 0$ een N te vinden is zodat voor $m > N$, $n > N$ geldt $|\sum_{k=1}^m a_k - \sum_{k=1}^n a_k| < \epsilon$. Is nu $m > n$ (het geval $m = n$ kan buiten beschouwing blijven, omdat de verlangde betrekking dan altijd geldt), dan is $m = n + p$ met p een natuurlijk getal en

$\sum_{k=1}^m a_k = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k$. Daaruit volgt:

(21.1) Een reeks $\sum a_n$ is dan en slechts dan convergent als bij iedere $\epsilon > 0$ een N te vinden is, zodat voor alle $n > N$ en alle p geldt $|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k| < \epsilon$.

Hieruit volgt dat evenals bij rijen de begintermen er voor de convergentie niets toe doen. Dat is niet zo vanzelfsprekend als het lijkt; men bedenke slechts, dat als men b.v. de eerste term van een reeks verandert, daardoor alle partiële sommen veranderen. De convergentie blijft dan wel bewaard, maar, anders dan bij rijen, verandert de som.

(21.2) Als men van een convergente reeks eindig veel termen verandert, is de veranderende reeks ook convergent (maar de som kan een andere zijn dan die van de oorspronkelijke reeks).

Neemt men in (21.1) $p = 1$ dan is $|a_{n+1}| < \varepsilon$, dus voor $n > N+1$ is

$$|a_n| < \varepsilon, \text{ dus}$$

(21.3) Als de reeks $\sum a_n$ convergeert, geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

We beginnen een reeks in plaats van met de index 1 ook wel eens met een ander geheel getal en definiëren $\sum_{k=m}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^n a_k$ als het bestaat. Uit (21.1) volgt weer, dat het geen invloed op de convergentie heeft met welke index we beginnen. Verder is voor $n_1 < n_2$ ook $\sum_{k=n_1}^{n_2} a_k = \sum_{k=n_1}^{n_2-1} a_k + \sum_{k=n_2}^{n_2} a_k$, dus

(21.4) Als p en q gehele getallen zijn met $p < q$ dan bestaan $\sum_{k=p}^{\infty} a_k$ en $\sum_{k=q}^{\infty} a_k$ beide wel of beide niet en als beide wel bestaan geldt

$$\sum_{k=p}^{\infty} a_k = \sum_{k=p}^{q-1} a_k + \sum_{k=q}^{\infty} a_k.$$

Verder kunnen we de termen van een convergente reeks in groepjes bij elkaar nemen; dit heeft alleen tot gevolg dat de rij der partiële sommen door een doelrij vervangen wordt, die dus convergent is met dezelfde limiet. Dus

(21.5) Als $\sum a_n$ convergeert en n_m is een stijgende rij natuurlijke getallen en $b_m = \sum_{k=n_{m-1}}^{n_m} a_k$, dan is $\sum b_n$ convergent met de zelfde som als $\sum a_n$.

Het omgekeerde geldt niet! Zo is de reeks $\sum 0$ convergent, maar $\sum (-1)^n$ niet en toch ontstaat uit de laatste reeks, als we groepjes van twee termen bij elkaar nemen, $\sum 0$. Men mag dus geen termen "splitsen".

Als voorbeeld van een reeks beschouwen we de meethundige reeks $\sum a^n$. Voor $a \neq 1$ geldt $\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ (bewijzen met volledige inductie). Verder is $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$ voor $|a| < 1$ (bedenk dat $|a^n| = |a|^n$) en niet voor $|a| \geq 1$. Tegens (21.3) kan de reeks dus alleen voor $|a| < 1$ convergeren. Dan geldt echter $\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$.

Beschouw nu de reeks $\sum \frac{1}{k(k+1)}$. Nu is $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, dus $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$. Dus $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$.

(21.6) Als $\sum a_n$ en $\sum b_n$ convergeren, dan convergeert ook $\sum (a_n + b_n)$ met een som die de som is van de sommen van $\sum a_n$ en $\sum b_n$.

(21.7) Als $\sum a_n$ convergeert en c is een complex getal, dan convergeert $\sum ca_n$ met een som die c maal de som van $\sum a_n$ is.

Opdrave 94. Bewijs (21.6) en (21.7).

Een reeks $\sum a_n$ heet absoluut convergent als $\sum |a_n|$ convergeert.

(21.8) Als een reeks absoluut convergeert, convergeert hij.

Bewijs: $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| \right|$. Pas hierop (21.1) toe.

(21.9) (Majorantcriterium): Als b_n een rij reële getallen ≥ 0 is,

$\sum b_n$ convergeert, en voor de rij a_n geldt dat er een N is zodat voor alle $n > N$ geldt $|a_n| \leq b_n$, dan convergeert $\sum a_n$ absoluut ($\sum b_n$ heet dan een majorant van $\sum a_n$).

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}$$

Bewijs: Voor $n > N$ geldt $\sum_{k=n}^{n+p} |a_k| \leq \sum_{k=n}^{n+p} b_k = \left| \sum_{k=n}^{n+p} b_k \right|$.
 Hieruit volgt dat $\sum \frac{1}{n^2}$ convergeert want $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}$. De har-
monische reeks $\sum \frac{1}{n}$ evenwel is divergent, want $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2^j} > 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2}$ en dit gaat naar $+\infty$ als $n \rightarrow \infty$.

(21.10) (Machtswortelcriterium van Cauchy): Als voor een rij a_n geldt $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, dan is $\sum a_n$ absoluut convergent, als $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ dan is $\sum a_n$ divergent. (Vt = 1 valt niets te concluderen).

Bewijs: Noem $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = b$. Als $b < 1$, dan is er een c waarvoor geldt $b < c < 1$. Daarbij is een N zodat voor $n > N$ geldt $\sqrt[n]{|a_n|} < c$ of $|a_n| < c^n$. Daardoor is de reeks $\sum a_n$ gemajoreerd met de meetkundige reeks $\sum c^n$ met $c < 1$. Dus $\sum a_n$ is absoluut convergent. Als $b > 1$, dan is er een deelrij uit $\sqrt[n]{|a_n|}$ die naar b convergeert. Voor die deelrij is in ieder geval van een zekere index af $|a_n| > 1$. Dus kan niet $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ zijn, dus de reeks $\sum a_n$ is divergent.

(21.11) (Quotientencriterium van d'Alembert): Als voor een rij a_n geldt $a_n \neq 0$ voor alle n en $\limsup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$, dan is $\sum a_n$ absoluut convergent, als $\liminf \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$, dan is $\sum a_n$ divergent.

Bewijs: Noem $\limsup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = b$. Als $b < 1$, kiezen we een c met $b < c < 1$. Dan is daarbij een N_1 zodat voor $n > N_1$ geldt $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < c$. Noem die $n = N_1 + p$, dan is $|a_n| \leq |a_{N_1}| c^p$ (volledige inductie). De reeks $\sum a_n$ is dus gemajoreerd met de reeks $\sum |a_{N_1}| c^p = |a_{N_1}| \sum c^p$, die convergeert. Dus $\sum a_n$ convergeert absoluut. Als $\liminf \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$, dan is er een N_2 te vinden zodat voor $n > N_2$ geldt $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$ en daaruit volgt $|a_n| \geq |a_{N_2+1}| > 0$ voor $n > N_2$. Dan kan echter niet $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ zijn, dus $\sum a_n$ is divergent.

We bewijzen nu, dat het criterium van d'Alembert zwakker is dan dat van Cauchy, d.w.z. dat voor alle reeksen waarvan de convergentie met d'Alembert kan worden aangetoond, dit ook met Cauchy kan, en dat er reeksen zijn waarvoor het wel met Cauchy kan maar niet met d'Alembert.

(21.12) Voor een rij a_n met alle $a_n \neq 0$ geldt $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$.

Bewijs: Als $\limsup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = +\infty$, valt er niets te bewijzen. Laat dus $\limsup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = b$ een reeel getal zijn. Bij $\varepsilon > 0$ is dan een N_1 te vinden, zodat voor $n > N_1$ geldt $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq b + \frac{\varepsilon}{2}$. Hieruit volgt $\frac{|a_{N_1+k}|}{|a_{N_1+k-1}|} \leq (b + \frac{\varepsilon}{2})^{k-1}$ (volledige inductie), dus $|a_{N_1+k}|^{\frac{1}{N_1+k}} \leq |a_{N_1+1}|^{\frac{1}{N_1+k}} \cdot (b + \frac{\varepsilon}{2})^{\frac{k-1}{N_1+k}}$. Het rechterlid van deze betrekkingen nadert voor $k \rightarrow \infty$ tot $(b + \frac{\varepsilon}{2})$. Er is dus een N_2 te vinden zodat voor $k > N_2$ geldt $|a_{N_1+k}|^{\frac{1}{N_1+k}} < b + \varepsilon$.

Noem $N = N_1 + N_2$; voor $n > N$ geldt dan $\sqrt[n]{|a_n|} < b + \xi$, dus $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq b$.

Hieruit volgt onmiddellijk dat als van een reeks de convergentie met d'Alembert kan worden aangetoond, dit ook met Cauchy het geval is.

Neem nu de reeks $\sum 2^{-n-(-1)^n}$. Nu is $\sqrt[n]{2^{-n-(-1)^n}} = 2^{-1 - \frac{(-1)^n}{n}}$ en dit nadert tot $\frac{1}{2}$ voor $n \rightarrow \infty$, dus volgens Cauchy convergeert de reeks absoluut. Maar $\frac{2^{-(n+1)-(-1)^{n+1}}}{2^{-n-(-1)^n}} = 2^{-1+(-1)^n - (-1)^{n+1}}$ en dit is $\frac{1}{8}$ voor on-

even n en 2 voor even n . Met d'Alembert kan niet tot de convergentie van deze reeks besloten worden.

(21.13) Als voor een rij a_n met alle $a_n \neq 0$ geldt, dat de rij $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ convergeert, dan convergeert ook de rij $\sqrt[n]{|a_n|}$ en wel met dezelfde limiet als de rij $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$.

Opgave 95. Bewijs (21.13) (op geheel analoge wijze als (21.12)).

(21.14) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Dit volgt direct uit (21.13) toegepast op $a_n = n$.

We laten nu aan voorbeelden zien, dat er convergente en divergente reeksen bestaan waarvan $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. Een divergentiereeks van deze soort is $\sum 1$, een absoluut convergente is $\sum \frac{1}{n^2}$, want $\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ en dit convergeert naar 1 voor $n \rightarrow \infty$.

Uit theoretisch oogpunt verdient het criterium van Cauchy in alle opzichten de voorkeur boven dat van d'Alembert want in de eerste plaats is het sterker en in de tweede plaats heeft het ook een mooiere vorm, want bij Cauchy valt absolute convergentie en divergentie uiteen in de gevallen $\limsup < 1$ en > 1 , maar bij d'Alembert kan pas bij $\liminf > 1$ tot divergentie besloten worden (zie nogmaals het voorbeeld onder (21.12) waar voor een absolute convergente reeks toch geldt $\limsup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$). Het nut van het criterium van d'Alembert is, dat het in vele gevallen makkelijker toe te passen is en ons daardoor in de gevallen waarin het werkt vaak in staat stelt de convergentie met minder moeite aan te tonen. Zo zien we met d'Alembert direct dat de reeks $\sum \frac{1}{n!}$ (waarin $n!$ gedefinieerd wordt door $0! = 1$ en $(n+1)! = (n+1)n!$) convergent is.

We kunnen nu ook reeksen van functies beschouwen $\sum f_n(x)$ en hiervoor convergentie en uniforme convergentie definiëren met behulp van de rij der partiele sommen $F_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$. Nu volgt uit (15.3) en (21.1) direct dat het volgende criterium voor uniforme convergentie geldt:

(21.15) Een reeks $\sum f_n(x)$ convergeert dan en slechts dan uniform als bij iedere $\varepsilon > 0$ een N te vinden is zodat voor $n > N$, p natuurlijk en alle x in de definitieverzameling geldt $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon$.

Het majorantencriterium neemt de volgende gedaante aan:

(21.16) (M - criterium van Weierstrass): Als er een rij M_n reële getallen en een N bestaat zodat voor $n > N$ voor alle x in de definitie ver-

zameling van $f_n(x)$ geldt $|f_n(x)| \leq M_n$ en $\sum M_n$ is convergent, dan convergeert $\sum f_n(x)$ uniform.

Bewijs: Voor $n > N$ is $\left| \sum_{k=n}^{n+p} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n}^{n+p} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n}^{n+p} M_n$.

Een belangrijk speciaal geval van reeksen van functies vormen de machtreeksen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Voor $x = 0$ zijn deze altijd convergent met som a_0 . Passen we op een machtreeks het criterium van Cauchy toe, dan zien we dat absolute convergentie optreedt als $\limsup \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \limsup |x| \sqrt[n]{|a_n|} < 1$; en divergentie als $\limsup |x| \sqrt[n]{|a_n|} > 1$. Als $\limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ een reëel getal is (dus niet $+\infty$), dan is makkelijk in te zien, dat $\limsup |x| \sqrt[n]{|a_n|} = |x| \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Als bovendien $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} \neq 0$, dan is dus voor $|x| < \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$ de machtreeks abso-

luut convergent, voor $|x| > \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$ divergent. Als $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0$

dan is voor alle x ook $\limsup |x| \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, dus de machtreeks absoluut convergent voor alle x . Als $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, dan is makkelijk in te zien dat voor alle $x \neq 0$ ook $\limsup |x| \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, dus de machtreeks is alleen convergent voor $x = 0$ en divergent voor alle andere x .

Als we nu $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$ noemen en als we hierbij de afspraak maken

dat als $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, $R = +\infty$ en als $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, $R = 0$ is, dan geldt:

(12.17) Een machtreeks $\sum a_n x^n$ is absoluut convergent voor $|x| < R$ en divergent voor $|x| > R$, waarin R bepaald wordt door $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$.

(Men noemt deze R de convergentiestraal van de machtreeks).

Het gebied van absolute convergentie is dus het binnengebied van een cirkel met straal R (met als grensgevallen een punt en het hele vlak).

Hoe de reeks zich gedraagt voor $|x| = R$ valt in het algemeen niet te zeggen. We merken vorder nog op, dat we, wegens (21.13), als $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$

bestaat, R ook kunnen bepalen uit $R = \frac{1}{\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}$.

Enkele voorbeelden van machtreeksen: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, de meetkundige reeks, $R = 1$, voor $|x| = 1$ is de reeks divergent (de termen convergeren niet naar nul). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$, $R = \frac{1}{\lim \frac{n^2}{(n+1)^2}} = 1$, voor $|x| = 1$ is de reeks

absoluut convergent, want $\sum \frac{1}{n^2}$ convergeert. $\sum \frac{x^n}{n!}$, $R = +\infty$.

$\sum n! x^n$, $R = 0$.

We kunnen ook machtreeksen van de vorm $\sum a_n (x-b)^n$ beschouwen. Het convergentiegebied wordt dan bepaald door een cirkel met straal R en met middelpunt b . (In het betoog vervange men x door $x-b$).

Een machtreeks $\sum a_n(x-b)^n$ bepaalt een functie $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^n$, gedefinieerd voor $|x-b| < R$. We bewijzen eerst de continuïteit en daarna de differentieerbaarheid van deze functie.

(21.18) Als R de convergentiestraal is van $\sum a_n(x-b)^n$ en r een reëel getal waarvoor $0 \leq r < R$, dan convergeert de machtreeks uniform voor $|x-b| \leq r$.

Bewijs: Voor $|x-b| \leq r$ geldt $|a_n(x-b)^n| = |a_n| |x-b|^n \leq |a_n| r^n$. De reeks $\sum |a_n| r^n$ convergeert omdat $r < R$. Volgens Weierstrass (21.16) convergeert $\sum a_n(x-b)^n$ dus uniform voor $|x-b| \leq r$.

Maarschuwing: de reeks behoeft niet uniform te convergeren voor $|x-b| < R$.

Opgave 96. Toon aan dat $\sum x^n$ niet uniform convergeert voor $|x| < 1$.

(21.19) Als R de convergentiestraal is van $\sum a_n(x-b)^n$, dan is $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^n$, gedefinieerd voor $|x-b| < R$, een continue functie.

Bewijs: We bewijzen de continuïteit in een punt c met $|c-b| < R$. Kies een reëel getal r , zodat $|c-b| < r < R$ is en beschouw de functie eerst alleen voor $|x-b| \leq r$. Daar de machtreeks dan uniform convergent is en de partiële sommen als polynomen continu zijn, is dus $A(x)$ ook continu in c . Maar dan is $A(x)$ ook continu in c als $A(x)$ voor alle x met $|x-b| < R$ gedefinieerd is. Men kiese $n \geq 1$. in de $\varepsilon - \delta$ -definitie de δ in ieder geval $< r - |c-b|$, dan geldt voor $|x-c| < \delta$ zeker $|x-b| \leq |x-c| + |c-b| < r - |c-b| + |c-b| = r$.

Om differentieerbaarheid te bewijzen, willen we (20.1) toepassen. De rij functies is dan $f_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x-b)^k$. Deze convergeert zeker voor $x = 0$. Nu is $f'_n(x) = \sum_{k=0}^n k a_k(x-b)^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1}(x-b)^k$. Nu zijn dit weer partiële sommen van een machtreeks. Laat de convergentiestraal van deze machtreeks R_1 zijn, dan is $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1}(x-b)^k$ gedefinieerd voor $|x-b| < R_1$. Laat $R_1 > 0$ zijn. Kies een reëel getal r met $0 < r < R_1$, dan is voor $|x-b| \leq r$ de machtreeks die $g(x)$ bepaalt uniform convergent. We mogen dus (20.1) toepassen en vinden dat voor $|x-b| \leq r$ geldt dat $f_n(x)$ convergent is, en $\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-b)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1}(x-b)^k$, dus dat de reeks termsgewijs gedifferentieerd mag worden. Daar dit voor iedere $r < R_1$ geldt, is $f_n(x)$ convergent voor $|x-b| < R_1$, d.w.z. voor de convergentiestraal R van $\sum a_n(x-b)^n$ geldt $R \geq R_1$ (dit geldt uiteraard ook voor $R_1 = 0$). Verder kan men op analoge wijze als in het bewijs van (21.19) inzien dat de termsgewijze differentieerbaarheid geldt voor alle x met $|x-b| < R_1$.

We bewijzen nu nog dat $R = R_1$. Daar we al weten dat $R \geq R_1$, is het voldoende aan te tonen dat $R \leq R_1$, d.w.z. $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} \geq \limsup \sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|}$. Als $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, valt er niets te bewijzen. Stel dus $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = b$ (een reëel getal ≥ 0). Bij $\varepsilon > 0$ is er dan een N_1 te vinden, zodat voor $n > N_1$ geldt $\sqrt[n]{|a_n|} < b + \frac{\varepsilon}{2}$.

Voor $n > N_1$ geldt dan $\sqrt[n]{(n+1) |a_{n+1}|} =$

$$= \sqrt[n]{n+1} \left(\sqrt[n]{|a_{n+1}|} \right)^{\frac{n+1}{n}} < \sqrt[n]{n+1} \left(b + \frac{\varepsilon}{2} \right)^{\frac{n+1}{n}}. \text{ Dit laatste nadert tot } b + \frac{\varepsilon}{2}$$

voor $n \rightarrow \infty$, immers dat $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$ bewijst men analoog als (21.14).

Er is dus een N_2 zodat voor $n > N_2$ geldt $\sqrt[n]{n+1} \left(b + \frac{\varepsilon}{2} \right)^{\frac{n+1}{n}} < b + \varepsilon$. Voor $n > \max(N_1, N_2)$ geldt dus $\sqrt[n]{(n+1) |a_{n+1}|} < b + \varepsilon$. Daarmee is $\limsup \sqrt[n]{(n+1) |a_{n+1}|} \leq b$ berezen en de volgende stelling verkregen:

(21.20) Als R de convergentiestraal is van de machtreeks $\sum a_n (x-b)^n$, dan is voor $|x-b| < R$ de functie $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-b)^n$ een differentieerbare functie, waarvan de afgeleide de functie $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x-b)^n$ is behorende bij de machtreeks, die uit de oorspronkelijke machtreeks ontstaat door termsgewijze differentiëren. De laatste machtreeks heeft ook convergentiestraal R .

Het spreekt vanzelf, dat men op de afgeleide weer dezelfde stelling kan toepassen en aldus verkrijgen, dat de door een machtreeks voorgestelde functie willekeurig vaak differentieerbaar is binnen zijn convergentiecirkel met als n^e afgeleide $A^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{k!} a_{k+n} (x-b)^k$. Als we afspreken, dat de nulde afgeleide van een functie gelijk is aan de functie zelf, dan geldt deze formule ook voor $n = 0$.

We merken nog op dat we ons eigenlijk het bewijs van (21.19) hadden kunnen besparen, omdat (21.19) direct uit (21.20) volgt.

Opgave 97. Bereken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$ (analoog met de reeks $\sum \frac{1}{n(n+1)}$).

Opgave 98. Bepaal de convergentiestralen van $\sum \frac{x^n}{n^n}$, $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$.

Opgave 99. Bewijs dat een reeks met reële termen > 0 dan en slechts dan convergent is als de rij der partiële sommen begrensd is en dat als hij niet convergent is, hij eigenlijk divergent is.

§22 Reeksen van Taylor.

We willen proberen een functie $f(x)$ als een machtreeks $\sum a_n (x-b)^n$ te schrijven. We weten al, dat als dat kan, dus $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-b)^n$, er geldt $f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{k!} a_{k+n} (x-b)^k$, dus $f^{(n)}(b) = n! a_n$, dus $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(b)}{k!} (x-b)^k$.

Als het dus mogelijk zal blijken een bepaalde functie als een machtreeks te schrijven, dan zal het in die gedaante moeten zijn.

(22.1) Stel $f(x)$ gedefinieerd op een convexe verzameling, in de omgeving van een punt b $(n-1)$ maal differentieerbaar en in b n maal differentieerbaar. Dan geldt $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(b)}{k!} (x-b)^k + (x-b)^n \varepsilon(x-b)$.

Bewijs: We passen volledige inductie naar n toe. Voor $n = 1$ komt er de gewone differentieerbaarheidsvoorwaarde (17.1). Stel de betrekking bewezen voor n , dan geldt dat de afgeleide van $f(x)$ -

An 84

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{k!} (x-b)^k \text{ gelijk is aan } f'(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{k!} k(x-b)^{k-1} =$$

$$= f'(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(b)}{k!} (x-b)^k \text{ en volgens inductieveronderstelling toe-}$$

gepast op $f'(x)$ is dat gelijk aan $(x-b)^n \mathcal{E}_1(x \rightarrow b)$. Nu is echter

$$\text{volgens (17.18)} \left| \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{k!} (x-b)^k}{x-b} \right| \leq \sup_{\substack{\xi \text{ tussen} \\ b \text{ en } x}} |\xi - b|^n |\mathcal{E}_1(\xi \rightarrow b)| \leq$$

$$\leq |x-b|^n \sup_{\substack{\xi \text{ tussen} \\ b \text{ en } x}} |\mathcal{E}_1(\xi \rightarrow b)|, \text{ dus } f(x) =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{k!} (x-b)^k +$$

$$+ (x-b)^{n+1} \mathcal{E}(x \rightarrow b).$$

We noemen nu $f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{k!} (x-b)^k = R_n(x)$ de n^{de} restterm van $f(x)$ in b . Houd nu x vast en veronderstel dat $f(\xi)$ gedefinieerd en n maal differentieerbaar is in alle punten tussen b en x . Dan is de functie met als variabele: $f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(u)}{k!} (x-u)^k$ differentieerbaar voor u tussen a en x en de afgeleide is

$$- \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(u)}{k!} (x-u)^k + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(u)}{k!} k(x-u)^{k-1} = - \frac{f^{(n)}(u)}{(n-1)!} (x-u)^{n-1}.$$

Pas hierop (17.18) toe dan komt er $|R_n(x)| \leq \frac{|x-b|}{(n-1)!} \sup_{\substack{\xi \text{ tussen} \\ b \text{ en } x}} |x - \xi|^{n-1} |f^{(n)}(\xi)|$.

Dit heet de restschatting van Cauchy. Deze is nog in een iets andere gedaante te brengen door te schrijven $\xi = \vartheta x + (1-\vartheta)b = b + \vartheta(x-b)$ met $0 \leq \vartheta \leq 1$, dan is $x - \xi = (1-\vartheta)(x-b)$, dus $|R_n(x)| \leq \frac{|x-b|}{(n-1)!}$.

$$\sup_{0 \leq \vartheta \leq 1} (1-\vartheta)^{n-1} |f^{(n)}(b + \vartheta(x-b))|.$$

Voor reële functies kan men door in plaats van (17.18) de middelwaardestelling van de differentiaalrekening toe te passen iets meer krijgen,

n.l.: $R_n(x) = \frac{(x-b)^n}{(n-1)!} (1-\vartheta)^{n-1} f^{(n)}(b + \vartheta(x-b))$ met $0 < \vartheta < 1$. Hiervoor hoeft $f(\xi)$ in de punten b en x slechts $(n-1)$ maal differentieerbaar te zijn, mits de $(n-1)^{\text{de}}$ afgeleiden daar continu zijn.

(22.2) (Restschattingsstelling van Cauchy): Als een functie $f(\xi)$ gedefinieerd is in alle punten gelegen tussen twee gegeven punten b en x en n maal differentieerbaar is en $R_n(x)$ wordt gedefinieerd door $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{k!} (x-b)^k + R_n(x)$, dan geldt

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x-b|}{(n-1)!} \sup_{\substack{\xi \text{ tussen} \\ b \text{ en } x}} |x - \xi|^{n-1} |f^{(n)}(\xi)|$$

$$\text{en } |R_n(x)| \leq \frac{|x-b|^n}{(n-1)!} \sup_{0 \leq \vartheta \leq 1} (1-\vartheta)^{n-1} |f^{(n)}(b + \vartheta(x-b))|.$$

Als $f(\xi)$ een reële functie is, gedefinieerd op $[b, x]$ en $(n-1)$ maal continu differentieerbaar en op (b, x) n maal differentieerbaar en $R_n(x)$ wordt gedefinieerd als boven, dan is er een reële ϑ met $0 < \vartheta < 1$

$$\text{zodat } R_n(x) = \frac{(x-b)^n}{(n-1)!} (1-\vartheta)^{n-1} f^{(n)}(b + \vartheta(x-b)).$$

Om een andere restschatting te krijgen passen we (17.22) toe met teller $f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(u)}{k!} (x-u)^k$ en noemer $(x-u)^n$, weer met u als veranderlijke. Voor u tussen b en x is dit inderdaad een eeneenduidige functie die tussenpunten in tussenpunten overvoert: stel $u = \lambda b + (1-\lambda)x$, dan is $x-u = \lambda(x-b)$ en $(x-u)^n = \lambda^n(x-b)^n = \lambda^n(x-b)^n + (1-\lambda^n)0$; als $v = \mu b + (1-\mu)x$ en $(x-u)^n = (x-v)^n$, dan is $\lambda^n(x-b)^n = \mu^n(x-b)^n$, dus $\lambda^n = \mu^n$ (voor $x = b$ valt er niets te bewijzen; we mogen dus $x \neq b$ veronderstellen) en $\lambda = \mu$, dus $u = v$. De afgeleide van $(x-u)^n$ is $-n(x-u)^{n-1}$ en dit is $\neq 0$ voor $u \neq x$. We moeten zorgen dat $u \neq x$; daartoe nemen we een hulppunt y gelegen tussen b en x en passen nu op het lijnstuk tussen b en y (17.22) toe:

$$\left| \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(y)}{k!} (x-y)^k - R_n(x)}{(x-y)^n - (x-b)^n} \right| \leq \sup_{\xi \text{ tussen } b \text{ en } y} \left| \frac{f^{(n)}(\xi) (x-\xi)^{n-1}}{(n-1)! n (x-\xi)^{n-1}} \right| =$$

$$= \frac{1}{n!} \sup_{\xi \text{ tussen } b \text{ en } y} |f^{(n)}(\xi)| \leq \frac{1}{n!} \sup_{\xi \text{ tussen } b \text{ en } x} |f^{(n)}(\xi)|.$$

De breuk in het linkerlid is een continue functie van y . Door y tot x te laten naderen vindt men

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x-b|^n}{n!} \cdot \sup_{\xi \text{ tussen } b \text{ en } x} |f^{(n)}(\xi)|.$$

Een andere vorm hiervan is $|R_n(x)| \leq \frac{|x-b|^n}{n!} \cdot \sup_{0 \leq \vartheta \leq 1} |f^{(n)}(b + \vartheta(x-b))|$. Dit heet de restschatting van Lagrange. Voor een reële functie $f(x)$

beschouwen we $f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(u)}{k!} (x-u)^k - \frac{(x-u)^n R_n(x)}{(x-b)^n}$. Deze is nul

voor $u = b$ en voor $u = x$. Verder is de functie differentieerbaar met

afgeleide $-\frac{f^{(n)}(u)}{(n-1)!} (x-u)^{n-1} + \frac{n(x-u)^{n-1} R_n(x)}{(x-b)^n}$. Volgens de stelling

van Rolle is deze afgeleide nul voor een ξ tussen b en x en wel

$$\xi = b + \vartheta(x-b) \text{ met } 0 < \vartheta < 1; \text{ dit geeft } R_n(x) = \frac{(x-b)^n}{n!} f^{(n)}(b + \vartheta(x-b))$$

(22.3) (Restschattingsstelling van Lagrange): Als een functie $f(\xi)$ gedefinieerd is in alle punten gelegen tussen twee gegeven punten b en x en n maal differentieerbaar is en $R_n(x)$ wordt gedefinieerd als in (22.2), dan geldt

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x-b|^n}{n!} \cdot \sup_{\xi \text{ tussen } b \text{ en } x} |f^{(n)}(\xi)|$$

$$\text{en } |R_n(x)| \leq \frac{|x-b|^n}{n!} \cdot \sup_{0 \leq \theta \leq 1} |f^{(n)}(b + \theta(x-b))|.$$

Als $f(\xi)$ een reële functie is, gedefinieerd op $[b, x]$ en $(n-1)$ maal continu differentieerbaar en op (b, x) n maal differentieerbaar en $R_n(x)$ wordt gedefinieerd als boven, dan is er een reële θ met $0 < \theta < 1$ zodat

$$R_n(x) = \frac{(x-b)^n}{n!} f^{(n)}(b + \theta(x-b)).$$

Een reeks $\sum \frac{f^{(n)}(b)}{n!} (x-b)^n$ heet een reeks van Taylor; als $b = 0$ ook reeks van Mac Laurin.

Als $f(x)$ willekeurig vaak differentieerbaar is, is $R_n(x)$ gedefinieerd voor alle n . Als nu voor een waarde van x geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$, dan heeft dat voor die x tot gevolg $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(b)}{k!} (x-b)^k$, dus $f(x)$ is door een machtreeks voorgesteld. Om $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ te bewijzen kunnen de bovenstaande restschattingen soms goede diensten bewijzen.

Neem als voorbeeld $f(x) = e^x$, dan is ook $f^{(k)}(x) = e^x$ en de reeks van Mac Laurin geeft $e^x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} + R_n(x)$ en volgens Lagrange is $R_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{\theta x}$. Nu is voor vaste x in ieder geval $e^{\theta x}$ begrensd en verder $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$, dus $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$, dus

$$(22.4) \quad e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

Speciaal is

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots$$

Maarschuwing. Opdat een functie door zijn reeks van Taylor voorgesteld wordt, is het niet voldoende, dat deze reeks convergeert; we zullen daar binnenkort een tegenvoorbeeld van behandelen. Als we echter ~~lim $R_n(x) = 0$~~ kunnen aantonen, dan bewijzen we daarmee tegelijkertijd, dat de reeks convergeert en dat hij de functie voorstelt.

Opgave 100. Bepaal de reeksen van MacLaurin van $\sin x$ en $\cos x$ en bewijs dat deze de functies voorstellen.

Opgave 101. Bepaal de reeks van Mac Laurin van $\frac{1}{1-x}$. Voor welke waarden van x stelt deze de functie voor?

§23. De stellingen van l'Hospital.

(23.1) Als $f(x)$ en $g(x)$ differentieerbaar zijn in a en $f(a) = g(a) = 0$ en $g'(a) \neq 0$, dan is $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$. (Dit betekent $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ bestaat en $= \frac{f'(a)}{g'(a)}$). Analoog in het vervolg).

Bewijs: Neem een rij $x_n \neq a$ met $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, dan is $f'(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{x_n - a}$. Omdat $g'(a) \neq 0$, is $\frac{f'(a)}{g'(a)} =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{f(x_n)}{x_n - a}}{\frac{g(x_n)}{x_n - a}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)}.$$

$$\text{Dus } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

(23.2) Als $f(x)$ en $g(x)$ gedefinieerd zijn op een convexe verzameling die a bevat en $(n-1)$ maal differentieerbaar en in a bovendien n maal differentieerbaar, $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a) = 0$ voor $0 \leq k \leq n-1$ en $g^{(n)}(a) \neq 0$, dan is $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$.

Bewijs: Uit (22.1) volgt $f(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon_1(x \rightarrow a)$ en $g(x) = \frac{g^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon_2(x \rightarrow a)$, dus $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a) + n! \varepsilon_1(x \rightarrow a)}{g^{(n)}(a) + n! \varepsilon_2(x \rightarrow a)}$ en dit nadert tot $\frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$ voor $x \rightarrow a$.

Voorbeeld: $f(x) = x^2$, $g(x) = -1 + x + e^{-x}$, dus $f(0) = g(0) = 0$. Nu is $f'(x) = 2x$, $g'(x) = 1 - e^{-x}$, dus $f'(0) = g'(0) = 0$. Tenslotte is $f''(x) = 2$, $g''(x) = e^{-x}$, dus $g''(0) = 1 \neq 0$, dus $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{-1 + x + e^{-x}} = 2$.

(23.3) Als $f(x)$ en $g(x)$ reële differentieerbare functies zijn gedefinieerd op een interval met uitzondering van een punt a , $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ en $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ bestaat, dan is $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Bewijs: Noem $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K$ en $F(x) = f(x) - Kg(x)$, dan is $F'(x) = f'(x) - Kg'(x)$, $\frac{F(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} - K$, $\frac{F'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} - K$ en $\lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(x)}{g'(x)} = 0$.

Wegens het bestaan van deze limiet is er een omgeving van a waar $g'(x) \neq 0$; voor de punten $x > a$, is in die omgeving $g(x)$ dan een eeneenduidige functie, die dus streng monotoon is. In die omgeving mogen we voor twee punten x en y ($y < x$) beide $> a$ (17.22) toepassen:

$$\left| \frac{F(x) - F(y)}{g(x) - g(y)} \right| \leq \sup_{\xi \text{ tussen } y \text{ en } x} \left| \frac{F'(\xi)}{g'(\xi)} \right| \leq \sup_{\xi \text{ tussen } a \text{ en } x} \left| \frac{F'(\xi)}{g'(\xi)} \right|.$$

Laat nu y tot a naderen, dan komt er $\left| \frac{F(x)}{g(x)} \right| \leq \sup_{\xi \text{ tussen } a \text{ en } x} \left| \frac{F'(\xi)}{g'(\xi)} \right|$. Hetzelfde kunnen we bewijzen voor $x < a$. Bij $\varepsilon > 0$ is er een $\delta_1 > 0$ zodat voor $|x-a| < \delta_1$ geldt $\left| \frac{F'(x)}{g'(x)} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Kies nu $\delta \leq \delta_1$ en verder zo klein dat voor $|x-a| < \delta$ geldt $g'(x) \neq 0$.

Dan is voor $|x-a| < \delta$ ook $\left| \frac{F(x)}{g(x)} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, dus $\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{g(x)} = 0$, dus

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = K.$$

Voorbeeld: $f(x) = e^x \sin(\log x)$, $g(x) = \sqrt{x}$ gedefinieerd voor $x > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$, $f'(x) = e^x \sin(\log x) \{ \sin(\log x) +$

$$+ \cos(\log x) \}, g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \lim_{x \downarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{2\sqrt{x} e^x \sin(\log x)}{e^x \sin(\log x) - 1}.$$

$$\cdot \{\sin(\log x) + \cos(\log x)\} = 0, \text{ dus } \lim_{x \downarrow 0} \frac{e^x \sin(\log x) - 1}{\sqrt{x}} = 0.$$

Er is een sterke analogie tussen (23.1) en (23.3); in de veronderstellingen zit echter een essentieel verschil: in (23.1) wordt differentieerbaarheid in a verondersteld, maar niet daarbuiten, in (23.3) wordt juist differentieerbaarheid buiten a verondersteld, en niet in a .

(23.4) Als $f(x)$ en $g(x)$ reële differentieerbare functies zijn gedefinieerd op een interval met uitzondering van een punt a , n maal differentieerbaar, $\lim_{x \rightarrow a} f^{(k)}(x) = \lim_{x \rightarrow a} g^{(k)}(x) = 0$ voor $0 \leq k \leq n-1$ en

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} \text{ bestaat, dan is } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}.$$

Bewijs: We passen volledige inductie naar n toe. Voor $n = 1$ krijgen we (23.3). Laat de stelling voor n bewezen zijn, dan moeten we haar voor $n+1$ bewijzen. We kunnen dan (23.3) toepassen op $f^{(n)}(x)$ en $g^{(n)}(x)$ en vinden dat $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$ bestaat en $= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n+1)}(x)}{g^{(n+1)}(x)}$. Volgens inductieveronderstelling bestaat dan ook $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ en $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$, dus

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n+1)}(x)}{g^{(n+1)}(x)}.$$

We kunnen nog opmerken, dat uit de gegevens van (23.4) en uit (19.6) direct volgt, dat, als we $f(a) = g(a) = 0$ stellen, $f(x)$ en $g(x)$ in a $(n-2)$ maal differentieerbaar zijn.

De tot nu toe in deze paragraaf behandelde stellingen waren van het type $\frac{0}{0}$; ze gingen over de grenswaarde waartoe een quotiënt van twee functies nadert, als beide in het kritieke punt nul worden. Nu geven we nog een stelling van het type $\frac{\infty}{\infty}$.

(23.5) Als $f(x)$ en $g(x)$ reële differentieerbare functies zijn gedefinieerd op een interval met uitzondering van een punt a , $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = +\infty$ en $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ bestaat, dan is $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Bewijs: We beginnen het bewijs geheel analoog als dat van (23.3) en vinden dat binnen een zekere omgeving van a (voor $|x-a| < \delta_1$) en voor $x > y > a$ of $x < y < a$ geldt $\left| \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \right| < \sup_{\xi \text{ tussen } a \text{ en } x} \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \right|$ en daaruit weer

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \right| < \frac{\xi}{2}. \text{ We houden nu } x \text{ vast en laten } y \text{ variëren, dan geldt}$$

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{\frac{f(x) - f(y)}{g(y) - g(x)} - \frac{f(y) - f(y)}{g(y) - g(x)}}{\frac{g(x) - g(y)}{g(y) - g(x)}} \text{ en dit is begrensd, maar dan is in een om-}$$

geving van a ook $\frac{f(y)}{g(y)}$ begrensd omdat $\lim_{y \rightarrow a} |g(y)| = +\infty$. Maar

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - \frac{f(y)}{g(y)} = \frac{f(x)}{g(x) - g(y)} - \frac{f(y)}{g(y)} \cdot \frac{g(x)}{g(x) - g(y)}, \text{ dus dit nadert}$$

tot nul als $y \rightarrow a$. Er is dus een $\delta_2 > 0$ zodat voor $|y-a| < \delta_2$ geldt $\left| \frac{F(x)-F(y)}{g(x)-g(y)} - \frac{F(y)}{g(y)} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Voor $|y-a| < \min(\delta_1, \delta_2)$ geldt dus $\left| \frac{F(y)}{g(y)} \right| < \varepsilon$,

$$\text{dus } \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{g(x)} = 0, \text{ dus } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ook deze stelling zouden we kunnen uitbreiden door er hogere afgeleiden in te betrekken; we gaan daar niet nader op in. Verder merken we nog op, dat de veronderstelling $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = +\infty$, die we in (23.5) zouden verwachten, blijkbaar overbodig is.

We proberen $\lim_{x \downarrow 0} x \log x$ te bepalen. We zouden het kunnen proberen door $f(x) = x$ en $g(x) = \frac{1}{\log x}$ te stellen (dat geeft het geval $\frac{0}{0}$).

$$\text{Maar dan is } f'(x) = 1 \text{ en } g'(x) = -\frac{1}{x \log^2 x}, \text{ dus } \frac{f'(x)}{g'(x)} = -x \log^2 x,$$

dus dit helpt niets (ook niet met hogere afgeleiden). Beter gaat het als we $f(x) = \log x$ en $g(x) = \frac{1}{x}$ stellen (dus het geval $\frac{\infty}{\infty}$), dan is $f'(x) = \frac{1}{x}$ en $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$, dus $\frac{f'(x)}{g'(x)} = -x$, dus:

$$(23.6) \lim_{x \downarrow 0} x \log x = 0.$$

Vervangt men hierin x door $\frac{1}{y}$ dan is voor $y \rightarrow +\infty$ weer $x \downarrow 0$ en $x \log x = \frac{1}{y} \log \frac{1}{y} = -\frac{\log y}{y}$. Dus $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x} = 0$. Vervangt men hierin x door y^α ($\alpha > 0$), dan is voor $y \rightarrow +\infty$ ook $x \rightarrow +\infty$ en $\frac{\log x}{x} = \frac{\log y^\alpha}{y^\alpha} = \alpha \frac{\log y}{y^\alpha}$. We vinden dus:

$$(23.7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0 \text{ voor } \alpha > 0.$$

Tegens $\lim_{x \downarrow 0} x^{\frac{1}{\alpha}} = 0$ volgt hieruit $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log x)^{\frac{1}{\alpha}}}{x} = 0$. Vervangt men hierin x door e^y en α door $\frac{1}{\alpha}$ dan is voor $y \rightarrow +\infty$ ook $x \rightarrow +\infty$ en $\frac{(\log x)^{\frac{1}{\alpha}}}{x} = \frac{(\log e^y)^{\frac{1}{\alpha}}}{e^y} = \frac{y^{\frac{1}{\alpha}}}{e^y}$. Dus we vinden:

$$(23.8) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{1}{\alpha}}}{e^x} = 0.$$

De beperking tot $\alpha > 0$ is hier niet nodig, want voor $\alpha \leq 0$ is het evident. De stellingen (23.7) en (23.8) zijn zeer belangrijk. Ze zijn als volgt onder woorden te brengen: Voor onbegrensd stijgende positieve x "wint" e^x het op de duur van iedere nog zo grote macht van x en "verliest" $\log x$ het op den duur van iedere nog zo kleine positieve macht van x .

We kunnen het onderzoek van $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ (en $-\infty$ evenzo) terugbrengen tot $x \rightarrow 0$ door x door $\frac{1}{y}$ te vervangen en $\frac{f(\frac{1}{y})}{g(\frac{1}{y})}$ voor $y \downarrow 0$ te behan-

len met l'Hospital. Daar echter $\frac{d}{dy} f\left(\frac{1}{y}\right) = -\frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)}{y^2}$ en $\frac{d}{dy} g\left(\frac{1}{y}\right) =$

$-\frac{g'\left(\frac{1}{y}\right)}{y^2}$ is hun quotiënt eenvoudig $\frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)}{g'\left(\frac{1}{y}\right)}$. We hoeven de overgang naar

y dus helemaal niet te maken en kunnen eenvoudig $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ nemen. Zo

vinden we b.v. rechtstreeks $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x}$ met $\frac{1}{x} = \frac{1}{x} \rightarrow 0$ voor $x \rightarrow +\infty$.

Opgave 102. Beschouw de functie $f(x)$ gedefinieerd door $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ voor reële $x \neq 0$ en $f(0) = 0$. Bewijs dat voor $x \neq 0$ geldt $f^{(n)}(x) =$

$$= \frac{P_n(x) e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{3n}}, \text{ waarin } P_n(x) \text{ een polynoom voorstelt. Bewijs dat } f(x)$$

ook in 0 willekeurig vaak differentieerbaar is en dat $f^{(n)}(0) = 0$ voor alle n . Bewijs dat de reeks van Mac Laurin van $f(x)$ voor alle x convergent is, maar alleen voor $x = 0$ de functie voorstelt.

Opgave 103. Bereken $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a+2x} - \sqrt{a+x}}{x}$ (a reëel > 0) en $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3 \sin x}$.

Opgave 104. Los opgave 93 nogmaals op, ditmaal met gebruikmaking van l'Hospital.

§ 24. Maxima en minima.

(24.1) Als $f(x)$ een reële functie is, gedefinieerd op een interval, $(2n-1)$ maal differentieerbaar, en in a $2n$ maal differentieerbaar, $f^{(k)}(a) = 0$ voor $1 \leq k \leq 2n-1$ en $f^{(2n)}(a) \neq 0$, dan heeft $f(x)$ in a een relatief minimum (resp. relatief maximum), als $f^{(2n)}(a) > 0$ (resp. $f^{(2n)}(a) < 0$).

Bewijs: Volgens (22.1) is $f(x) - f(a) = f^{(2n)}(a) \frac{(x-a)^{2n}}{(2n)!} + (x-a)^{2n} \varepsilon(x \rightarrow a) = (x-a)^{2n} \left\{ \frac{f^{(2n)}(a)}{(2n)!} + \varepsilon(x \rightarrow a) \right\}$. Kies een zo kleine omgeving van a , dat $|\varepsilon(x \rightarrow a)| < \frac{1}{2} \left| \frac{f^{(2n)}(a)}{(2n)!} \right|$ dan heeft daar $\frac{f^{(2n)}(a)}{(2n)!} + \varepsilon(x \rightarrow a)$ hetzelfde teken als $f^{(2n)}(a)$. Aangezien bovendien $(x-a)^{2n} > 0$ voor $x \neq a$, heeft daar $f(x) - f(a)$ voor $x \neq a$ ook hetzelfde teken als $f^{(2n)}(a)$, waaruit de bewering van de stelling direct volgt.

(24.2) Als $f(x)$ een reële functie is, gedefinieerd op een interval, $2n$ maal differentieerbaar, en in a $(2n+1)$ maal differentieerbaar, $f^{(k)}(a) = 0$ voor $1 \leq k \leq 2n$ en $f^{(2n+1)}(a) \neq 0$, dan is $f(x)$ in a stijgend (resp. dalend), als $f^{(2n+1)}(a) > 0$ (resp. $f^{(2n+1)}(a) < 0$).

Bewijs: Nu geldt $f(x) - f(a) = (x-a)^{2n+1} \left\{ \frac{f^{(2n+1)}(a)}{(2n+1)!} + \varepsilon(x \rightarrow a) \right\}$.

Hiermee redeneren we op analoge wijze verder als in (24.1), alleen is nu $(x-a)^{2n+1} > 0$ voor $x > a$ en < 0 voor $x < a$.

Opgave 105. Ga het gedrag in het punt 1 na van de functies $x^3 - 3x + 3$ en $x^4 - 6x^2 + 6x + 1$.

§ 25. De exponentiële, goniometrische en logaritmische functies.

We hebben e^x gedefinieerd voor reële x en bewezen dat daarvoor geldt $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Deze reeks convergeert echter voor alle complexe x . We definiëren nu e^x voor complexe x door $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. In de functietheorie wordt bewezen, dat dit de enige voor complexe x gedefinieerde functie is, die differentieerbaar is, en voor reële x met e^x overeenstemt. We

schrijven nu een complexe veranderlijke met de letter z en noemen $\Re z = x$, $\Im z = y$, dus $z = x + iy$.

Om de afgeleide van e^z te bepalen mogen we de reeks termsgewijs differentiëren; we vinden dan $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{z^n}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, dus:

$$(25.1) \quad \frac{de^z}{dz} = e^z.$$

De afgeleide van $e^z e^{-z}$ is nul, dus deze functie is constant; door $z=0$ te substitueren vinden we dat deze constante $= 1$ is, dus:

$$(25.2) \quad e^z e^{-z} = 1.$$

Hieruit volgt dat $e^z \neq 0$ voor alle z en $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$.

(25.3) Als $f(z)$ gedefinieerd is op een convexe verzameling, differentieerbaar is, en $f'(z) = f(z)$, dan is $f(z) = ce^z$.

Opgave 106. Bewijs (25.3) (Beschouw de functie $e^{-z}f(z)$).

We kunnen dit toepassen op de functie e^{z+a} , want hiervan is de afgeleide e^{z+a} . Door $z = 0$ te substitueren vinden we dat de constante e^a is, dus:

$$(25.4) \quad e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}.$$

Als $\bar{z}$ de toegevoegd complexe van z is, is $e^{\bar{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^k}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{\bar{z}^k}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{e^{2\Re z}}} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} = \frac{1}{\sqrt{e^{2\Re z}}} e^z = e^{\bar{z}}$. Dit geeft $|e^z| = \sqrt{e^z e^{\bar{z}}} = \sqrt{e^{z+\bar{z}}} = \sqrt{e^{2\Re z}} = e^{\Re z}$, omdat $e^x > 0$ voor alle reële x . Dus:

$$(25.5) \quad |e^z| = e^{\Re z}.$$

Hieruit volgt dat als z zuiver imaginair is: $z = iy$, $|e^{iy}| = e^0 = 1$. Algemeen is $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = |e^z| e^{iy}$.

Beschouwen we e^z als een afbeelding van het complexe vlak in het complexe vlak, dan worden lijnen evenwijdig met de Y -as (x is constant) blijkbaar afgebeeld op stralen door de oorsprong 0 , gaande door het punt e^{iy} op de eenheidscirkel (de cirkel met straal 1 en middelpunt in 0) en lijnen evenwijdig met de X -as (y is constant) in cirkels met middelpunt in 0 en stralen e^x . De afbeelding zal dus geheel bepaald zijn, als we vastgesteld hebben hoe door e^{iy} de reële y in de eenheidscirkel worden afgebeeld. Dit gaan we nu onderzoeken. Er doen zich daarbij twee vragen voor:

1° Is de afbeelding eeneenduidig? Het antwoord luidt: neen.

2° Is de afbeelding een afbeelding op de eenheidscirkel? Het antwoord: ja

We voeren nu twee hulpfuncties in, die we $\sin z$ en $\cos z$ noemen. In het voorafgaande deel van deze cursus hebben we deze functies al beschouwd, ontleend aan de meetkunde. Van deze beschouwingen zullen we in het vervolg geen gebruik meer maken. Voor het afleiden van eigenschappen van deze functies mogen we nu geen beroep meer doen op aan de meetkunde ontleende kennis omtrent deze functies. We definiëren:

$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ en $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$. Hieruit volgen nu gemakkelijk de volgende eigenschappen:

$$(25.6) \sin^2 z + \cos^2 z = 1.$$

$$(25.7) \sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2,$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2.$$

$$(25.8) \sin(-z) = -\sin z, \cos(-z) = \cos z.$$

$$(25.9) \begin{aligned} \sin z_1 + \sin z_2 &= 2 \sin \frac{1}{2}(z_1 + z_2) \cos \frac{1}{2}(z_1 - z_2), \\ \cos z_1 + \cos z_2 &= 2 \cos \frac{1}{2}(z_1 + z_2) \cos \frac{1}{2}(z_1 - z_2), \\ \cos z_1 - \cos z_2 &= -2 \sin \frac{1}{2}(z_1 + z_2) \sin \frac{1}{2}(z_1 - z_2). \end{aligned}$$

$$(25.10) \frac{d \sin z}{dz} = \cos z, \frac{d \cos z}{dz} = -\sin z.$$

$$(25.11) e^{iz} = \cos z + i \sin z \text{ (formule van Euler).}$$

Opgave 107. Bewijs (25.6) tot en met (25.11).

Als z reëel is, zijn $\sin z$ en $\cos z$ ook reëel, omdat dan e^{iz} en e^{-iz} toegevoegd complex zijn en $\cos y = \Re e^{iy}$, $\sin y = \Im e^{iy}$. Voor reële z geeft de formule van Euler juist de splitsing van e^{iz} in reëel en imaginair deel.

Verder geldt voor willekeurige z , $e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n z^n}{n!}$ en $e^{-iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n i^n z^n}{n!}$, dus $e^{iz} + e^{-iz} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n} z^{2n}}{(2n)!} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$ en $e^{iz} - e^{-iz} = 2i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1} z^{2n+1}}{(2n+1)!} = 2i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ en hieruit volgt direct:

$$(25.12) \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \frac{z^6}{720} + \dots,$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \frac{z^7}{5040} + \dots$$

Noem de verzameling der reële getallen y , waarvoor $e^{iy} = 1$ geldt,

L . Dan is $0 \in L$. Als $y \in L$, dan ook $ny \in L$ voor gehele n . Dit bewijst men voor natuurlijke n met volledige inductie en voor negatieve $n = -m$ met behulp van $e^{-imy} = \frac{1}{e^{imy}}$. Verder is L gesloten in de reële getal-

len. Stel n.l. een rij $y_n \in L$ met $\lim y_n = y$, dan is $e^{iy} = \lim e^{iy_n} = 1$, dus $y \in L$. Verder kan 0 geen verdichtingspunt van L zijn. Stel n.l. een

rij $y_n \in L$ met $y_n \neq 0$ voor alle n en $\lim y_n = 0$, dan is $0 =$

$$= \lim \frac{e^{iy_n} - 1}{y_n} = \left(\frac{de^{iy}}{dy} \right)_{y=0} = (ie^{iy})_{y=0} = i, \text{ hetgeen een tegenspraak geeft.}$$

Als er dus een $y \neq 0$ in L is, dan is er ook een positieve $y \in L$ (met y is ook $-y \in L$), en de onderste grens van de verzameling der positieve $y \in L$ kan niet nul zijn (omdat nul geen verdichtingspunt van L is), dus is een positief getal, dat een minimum is (omdat L gesloten is). Als er dus een $y \neq 0$ in L is, is er ook een kleinste positief getal in L .

We zullen nu bewijzen, dat er inderdaad een $y \neq 0$ in L bestaat. Daartoe beschouwen we $\cos x$ voor reële x . Dit is een reële continue functie. Nu nemen we in de reeks die $\cos x$ bepaalt telkens twee opeenvolgende termen bij elkaar (dit is geoorloofd wegens (21.5)) en vinden $\cos x =$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^{2n-1} x^{4n-2}}{(4n-2)!} + \frac{(-1)^{2n} x^{4n}}{(4n)!} \right\} = 1$$

$= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-2}}{(4n)!} \{(4n-1)4n-x^2\}$. Als nu $0 < x < 3$, dan bestaat, wegens $(4n-1)4n \geq 12$ voor alle natuurlijke n , de laatste reeks geheel uit positieve termen, waaruit volgt dat de som groter is dan een partiële som. Daaruit volgt: $\cos x < 1 - \frac{x^2}{4!} \{12-x^2\} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$. Vullen we hierin voor x de waarde 1,6 in, dan vinden we $\cos(1,6) < -0,00693... < 0$. Verder is $\cos 0 = 1$. Er is dus een positief reëel getal x gelegen tussen 0 en 1,6 waarvoor $\cos x = 0$.

Opgave 108. Bewijs, dat de kleinste positieve x , waarvoor $\cos x = 0$, tussen 1,4 en 1,6 ligt. (Neem in de reeks op een andere wijze twee opeenvolgende termen bij elkaar).

Voor de x , waarvoor $\cos x = 0$, geldt $e^{ix} + e^{-ix} = 0$, dus $e^{2ix} = -1$, dus $e^{4ix} = 1$, dus $4x \in L$. Daarmee is het bestaan van een $y \neq 0$ in L bewezen.

We noemen nu de helft van de kleinste y waarvoor $y \in L$ is π , dan is $e^{2\pi i} = 1$. Stel nu $e^{iy} = 1$ en bepaal het gehele getal n zodat $n \leq \frac{y}{2\pi} < n+1$, dan is $2\pi n \leq y < 2\pi(n+1)$, dus $0 \leq y - 2\pi n < 2\pi$. Verder is $1 = e^{iy} = e^{i2\pi n} e^{i(y-2\pi n)} = e^{i(y-2\pi n)}$. Omdat 2π de kleinste positieve x is waarvoor $e^{ix} = 1$, is dus $y = 2\pi n$. L bestaat dus uit alle gehele veelvouden van 2π . Als nu voor willekeurige complexe z_1 en z_2 geldt $e^{z_1} = e^{z_2}$, dan is $e^{z_2 - z_1} = 1$, dus $z_2 - z_1 = 2\pi ni$, dus $z_2 = z_1 + 2\pi ni$. Omgekeerd is steeds $e^{z+2\pi ni} = e^z e^{2\pi ni} = e^z$. Deze laatste eigenschap drukken we uit door te zeggen dat e^z de periode $2\pi i$ heeft. (In het algemeen heeft $f(z)$ de periode ω als geldt $f(z+\omega) = f(z)$).

We vragen ons nu af voor welke complexe waarden van z geldt $\sin z = 0$. Als $\sin z = 0$, is $e^{iz} = e^{-iz}$, $e^{2iz} = 1$, $2iz = 2\pi in$, $z = n\pi$. Omgekeerd is $\sin n\pi = \frac{1}{2i}(e^{in\pi} - e^{-in\pi}) = \frac{e^{-in\pi}}{2i}(e^{2in\pi} - 1) = 0$. Dus: (25.13) $\sin z = 0$ dan en slechts dan als $z = n\pi$ (n geheel).

We doen nu hetzelfde voor $\cos z$. Als $\cos z = 0$, is $e^{iz} = -e^{-iz}$, $e^{2iz} = -1$, $e^{4iz} = 1$, $4iz = 2n\pi i$, $z = \frac{1}{2}n\pi$, maar als n even is, $n = 2m$, $z = m\pi$, $e^{2iz} = e^{2im\pi} = 1$, maar dit moet -1 zijn, dus n even is uitgesloten. Er blijft over n oneven, $n = 2m+1$, $z = \frac{1}{2}\pi + m\pi$. Omgekeerd is $\cos(\frac{1}{2}\pi + m\pi) = \frac{1}{2}(e^{(\frac{1}{2}\pi + m\pi)i} + e^{-(\frac{1}{2}\pi + m\pi)i}) =$
 $= \frac{e^{-\frac{1}{2}\pi i - m\pi i} + e^{\frac{1}{2}\pi i + m\pi i}}{2} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\pi i - m\pi i}}{2}(e^{\pi i + 2\pi mi} + 1) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\pi i - m\pi i}}{2}(e^{\pi i} + 1).$

Als $a^2 = b^2$, dan is $0 = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, dus $a = b$ of $a = -b$.

Nu is $(e^{\pi i})^2 = e^{2\pi i} = 1 = 1^2$, maar $e^{\pi i} = 1$ is uitgesloten, omdat 2π het kleinste positieve getal y is, waarvoor $e^{iy} = 1$, dus $e^{\pi i} = -1$, dus $\cos(\frac{1}{2}\pi + m\pi) = 0$.

(25.14) $\cos z = 0$ dan en slechts dan als $z = \frac{1}{2}\pi + n\pi$ (n geheel).

We beschouwen de functies $\sin x$ en $\cos x$ voor reële x nog wat nader. Uit (25.6) volgt dat als $\sin x = 0$, dan $\cos x = \pm 1$ en als $\cos x = 0$, dan $\sin x = \pm 1$. Nu is $\sin 0 = 0$ en $\cos 0 = 1$. Uit (25.10) volgt dan dat $\sin x$ in 0 stijgend is, dus is $\sin x > 0$ voor $0 < x < \pi$. Nu is $\cos \frac{1}{2}\pi = 0$, dus $\sin \frac{1}{2}\pi = 1$. Uit (25.10) volgt dan weer, dat $\cos x$ in $\frac{1}{2}\pi$ dalend is dus $\cos x < 0$ voor $\frac{1}{2}\pi < x < \pi$. Nu is $\sin \pi = 0$, dus $\cos \pi = -1$. Dus neemt $\cos x$ voor x tussen 0 en π alle waarden tussen $+1$ en -1 aan. Uit (25.8) volgt dat $\sin(-\frac{1}{2}\pi) = -1$, dus $\sin x$ neemt voor x tussen $-\frac{1}{2}\pi$ en $+\frac{1}{2}\pi$ alle waarden tussen -1 en $+1$ aan.

Neem nu een willekeurig complex getal w , met $|w| = 1$, dan is $(\Re w)^2 + (\Im w)^2 = 1$, dus $-1 \leq \Re w \leq 1$. Er is een reëel getal x te vinden, zodat $\cos x = \Re w$. Voor die x is $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - (\Re w)^2 = (\Im w)^2$. Dus $\sin x = \Im w$ of $\sin x = -\Im w$. Als $\sin x = -\Im w$, kiezen we $x_1 = -x$ dan is $\cos x_1 = \cos x = \Re w$ en $\sin x_1 = -\sin x = \Im w$. In ieder geval is er dus een reëel getal y te vinden zodat $\cos y = \Re w$ en $\sin y = \Im w$; dus $e^{iy} = \cos y + i \sin y = \Re w + i \Im w = w$. De reële as wordt dus door de afbeelding e^{iy} inderdaad op de eenheidscirkel afgebeeld. Daarmee zijn de twee bovenstaande vragen beantwoord.

Nemen we nu een willekeurig complex getal $w \neq 0$, dan is $w = |w| \frac{w}{|w|}$ en $|\frac{w}{|w|}| = 1$. Er is dus een reële y zodat $e^{iy} = \frac{w}{|w|}$; verder is er een reële x zodat $e^x = |w|$, dus $w = e^x e^{iy} = e^{x+iy}$. De afbeelding, die tot stand gebracht wordt door e^z overdekt dus het gehele complexe vlak behalve het punt 0 .

(25.15) Bij ieder complex getal $w \neq 0$ is een complex getal z te vinden, zodat $e^z = w$; $e^{z_1} = e^{z_2}$ dan en slechts dan als $z_2 = z_1 + 2\pi i$ in (n geheel).

(25.16) $\sin \frac{1}{2}\pi = 1$; $\cos \pi = -1$.

We noemen een reëel getal y , zodat $e^{iy} = \frac{w}{|w|}$ een argument van w , geschreven $y = \arg w$. Dit is niet een functie van w volgens de door ons gegeven definitie van functie, want y is niet ondubbelzinnig door w bepaald. Het argument is slechts bepaald op veelvouden van 2π na. Verder geldt $w = |w| e^{i \arg w} = |w| \{ \cos(\arg w) + i \sin(\arg w) \}$. Meetkundig is $\arg w$ de hoek die de voorstraal van w maakt met de positieve reële as. We zouden door zekere afspraken van $\arg w$ wel een functie kunnen maken, b.v. door voor te schrijven $0 \leq \arg w < 2\pi$.

We noemen nu een z , zodat $e^z = w$, een logarithme van w : $\log w = z$. Ook deze is niet ondubbelzinnig bepaald. Als $e^z = w$, dan $e^{z+2\pi i} = w$, dus $\Re z = \log |w|$ (de van vroeger bekende reële logarithme, die we nu ter onderscheiding met een hoofdletter schrijven). Verder is $e^{i \Im z} = \frac{w}{|w|}$, dus $\Im z = \arg w$, dus

(25.17) $\log w = \text{Log } |w| + i \arg w$ voor $w \neq 0$.

De logarithme is dus op veelvouden van $2\pi i$ na bepaald. We noemen die waarde van de logarithme waarvoor $-\pi < \arg w \leq \pi$ wel de hoofdwaarde van de logarithme; deze stemt voor reële w met de van vroeger bekende reële logarithme overeen. Ook de hoofdwaarde van de logarithme wordt wel met een hoofdletter geschreven.

Neem een willekeurige $w_0 \neq 0$ en kies daarbij een z_0 zodat $e^{z_0} = w_0$. Kies verder een reëel getal α zodat $\alpha < \Im z_0 < \alpha + 2\pi$. We beperken ons nu tot waarden van z waarvoor $\alpha \leq \Im z < \alpha + 2\pi$. Voor die z is er een eeneenduidige betrekking met het w -vlak met uitzondering van $w = 0$ volgens $e^z = w$. Dit is een continue afbeelding. We willen bewijzen, dat de omkering $\log w = z$ continu is in w_0 (en dan ook in alle punten waar $\arg w \neq \alpha + 2\pi n$). Kies een reëel getal $\gamma > 0$ en een reëel getal $\beta \in [\alpha, \alpha + 2\pi)$ en beperken we ons tot die z waarvoor $-\gamma \leq \Re z \leq \gamma$ en $\alpha < \Im z \leq \beta$, dan vormen die z een compacte ruimte en dan is de omkering $\log w = z$ dus continu. Neem nu een rij w_n met $\lim w_n = w_0$ en de bijbehorende punten z_n ($e^{z_n} = w_n$). Stel dat $\Re z_n$ naar boven onbegrensd was, dan bevatte z_n een deelrij waarvoor $\Re z \rightarrow +\infty$. Voor de corresponderende deelrij van w_n gold dan $|w| \rightarrow +\infty$, in strijd met $\lim w_n = w_0$. Dus $\Re z_n$ is naar boven begrensd. Stel dat $\Re z_n$ naar beneden onbegrensd was, dan bevatte z_n een deelrij waarvoor $\Re z \rightarrow -\infty$. Voor de corresponderende deelrij van w_n gold dan $|w| \rightarrow 0$ in strijd met $\lim w_n = w_0 \neq 0$. Dus $\Re z_n$ is naar beneden begrensd. Er is dus een reëel getal $\gamma > 0$, zodat $-\gamma \leq \Re z_n \leq \gamma$ voor alle n . We bewijzen nu dat er een reëel getal $\beta < \alpha + 2\pi$ bestaat, zodat voor alle n geldt $\Im z_n \leq \beta$. Als dat niet zo is, is er bij iedere $\beta < \alpha + 2\pi$ een n , zodat $\beta < \Im z_n < \alpha + 2\pi$, maar dan bestaat er een deelrij van z_n waarvoor $\Im z \rightarrow \alpha + 2\pi$ en omdat deze deelrij begrensd is, bevat deze weer een convergente deelrij met limiet z^* , waarvoor geldt $\Im z^* = \alpha + 2\pi$. De corresponderende deelrij van w_n convergeert dan naar e^{z^*} , maar ook naar w_0 , dus $e^{z^*} = e^{z_0}$, dus $z^* - z_0 = 2\pi i$, dus $\Im z^* - \Im z_0 = 2\pi$, maar $\Im z^* - \Im z_0 = \alpha + 2\pi - \Im z_0$ en daarvoor geldt $0 < \alpha + 2\pi - \Im z_0 < 2\pi$. Dit geeft een tegenspraak. Dus voor alle n geldt $-\gamma \leq \Re z_n \leq \gamma$, $\alpha < \Im z_n \leq \beta < \alpha + 2\pi$. Voor zulke z is echter de continuïteit van de omkering bewezen en geldt dus $\lim z_n = z_0$. Om de logarithme ondubbelzinnig bepaald en continu te maken kunnen we een coupure aanbrengen bestaande uit een straal door de oorsprong waarvoor geldt $\arg w = \alpha + 2\pi n$.

(25.18) Als voor een reëel getal α die complexe getallen w uitgesloten worden waarvoor $\arg w = \alpha + 2\pi n$ benevens $w = 0$ en voor de overige w $\arg w$ zo gekozen wordt dat $\alpha < \arg w < \alpha + 2\pi$ en $\log w$ met behulp van deze waarde van $\arg w$ gedefinieerd wordt, dan is $\log w$ een continue functie.

Bij dezelfde afspraak is $\log w$ ook differentieerbaar, want e^z is dan eeneenduidig en differentieerbaar en de omkeersfunctie is continu, dus volgend (17.9) is $\log w$ ook differentieerbaar en $\frac{d \log w}{dw} = \frac{1}{\frac{de^z}{dz}} = \frac{1}{e^z} = \frac{1}{w}$.

(25.19) Onder dezelfde voorwaarden als in (25.18) is $\log w$ een differentieerbare functie en $\frac{d \log w}{dw} = \frac{1}{w}$.

Opgave 109. Bewijs dat $\log w_1 w_2$ en $\log w_1 + \log w_2$ op een veelvoud van $2\pi i$ na aan elkaar gelijk zijn.

We kunnen nu ook machten definiëren met willekeurige complexe exponenten en willekeurige complexe grondtallen $\neq 0$ door $a^b = e^{b \log a}$. In het rechterlid staat de al bekende macht van e met complexe exponent. Door het optreden van $\log a$ is de waarde van a^b niet ondubbelzinnig bepaald. De verschillende waarden die a^b kan aannemen ontstaan uit elkaar door vermenigvuldiging met $e^{2\pi i n}$ in b . Alleen als b geheel is, is deze factor altijd 1 en is er dus maar één waarde. We vergelijken de nu gedefinieerde macht in die gevallen waarin de vroegere definities toepasselijk zijn met de toen gedefinieerde macht. Ter onderscheiding noemen we de nu gedefinieerde macht even $a(b)$. Er zijn dan drie gevallen waarvoor we al eerder machten gedefinieerd hebben.

1^o exponent geheel, grondtal complex $\neq 0$. Nu is $a(1) = e^{\log a} = a = a^1$. Als $a(n) = a^n$, dan is $a(n+1) = e^{(n+1)\log a} = e^{n \log a + \log a} = e^{n \log a} e^{\log a} = a(n)a = a^n a = a^{n+1}$; $a(0) = e^0 = 1 = a^0$; $a(-n) = e^{-n \log a} = \frac{1}{e^{n \log a}} = \frac{1}{a(n)} = \frac{1}{a^n} = a^{-n}$. In dit geval is er dus volledige overeenstemming.

2^o exponent reëel, grondtal reëel > 0 . Nu is $a(b) = e^{b \log a}$ in het algemeen niet ondubbelzinnig bepaald (altijd als b niet geheel is), maar de oude waarde komt wel onder de nieuwe voor, n.l. als men voor $\log a$ de hoofdwaarde, dat is de gewone reële waarde $\text{Log } a$ kiest.

3^o exponent complex, grondtal $= e$: $e(b) = e^{b \log e} = e^{b \cdot 2\pi i n}$; deze is in het algemeen niet ondubbelzinnig bepaald (altijd als b niet geheel is), maar de oude waarde komt wel onder de nieuwe voor n.l. als men voor $\log e$ de hoofdwaarde $\text{Log } e = 1$ kiest.

In het geval 3^o leidt dit tot de eigenaardige moeilijkheid, dat men niet weet, als men e^b ziet staan, of hiernmee de in het begin van deze paragraaf gedefinieerde waarde $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!}$ bedoeld wordt of de algemene waarde volgens de zoëven gegeven algemene machtsdefinitie. We maken de afspraak, dat als niet het tegendeel wordt vermeld met e^b de waarde $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!}$ bedoeld wordt. In het algemeen is voorzichtigheid met alle niet ondubbelzinnig bepaalde "functies" geboden.

We kunnen $a^z = e^{z \log a}$ bij vaste a en veranderlijke z tot een ondubbelzinnig bepaalde functie maken door een vaste keuze van $\log a$;

dan is $\frac{da^z}{dz} = e^z \log a \log a = a^z \log a$ evenals vroeger. Bij z^b lukt dat niet; er moeten dan overeenkomstige afspraken gemaakt worden als vroeger bij $\log z$; dan geldt

$$\frac{dz^b}{dz} = \frac{d e^{b \log z}}{dz} = \frac{b e^{b \log z}}{z} = \frac{b e^{b \log z}}{e^{\log z}} = b e^{(b-1) \log z} = b z^{b-1}. \text{ De}$$

formule $\frac{dz^b}{dz} = b z^{b-1}$ geldt als in beide leden van de macht dezelfde waarde van $\log z$ gekozen wordt.

Men zou kunnen vragen of de vroeger voor machten afgeleide formules zoals $a^c b^c = (ab)^c$, $a^b a^c = a^{b+c}$, $(a^b)^c = a^{bc}$ geldig blijven. Nu zijn hier in het algemeen zowel linker- als rechterlid van een gelijkheid niet ondubbelzinnig bepaald, maar men zou kunnen veronderstellen, dat de verzameling der waarden, die het linkerlid kan aannemen dezelfde zou zijn als de verzameling der waarden die het rechterlid kan aannemen. Voor de eerste der genoemde formules is dat inderdaad het geval, voor de beide andere behoeft dat niet zo te zijn. We

gaan daar niet verder op in. Wel geven we enkele voorbeelden. Kiest men in de tweede formule $b = i$, $c = -i$, dan is $b+c = 0$, dus $a^{b+c} = 1$. Verder is $a^i = e^{i \log a - 2\pi k}$, $a^{-i} = e^{-i \log a + 2\pi l}$, dus $a^i a^{-i} = e^{2\pi(l-k)}$, dus $a^i a^{-i}$ doorloopt alle waarden $e^{2\pi n}$ (n geheel). Kiest men in de derde formule $b = 0$, $c = i$, dan is $bc = 0$, dus $a^{bc} = 1$. Verder is $a^0 = 1$ en $1^i = e^{2\pi n}$.

(25.20) $(a^b)^n = a^{nb}$ voor gehele n ; dit is zo op te vatten dat de verzameling waarden die het linkerlid kan aannemen dezelfde is als de verzameling waarden die het rechterlid kan aannemen.

Opgave 110. Bewijs (25.20).

Opgave 111. Bewijs dat voor een natuurlijk getal n de n complexe getallen $e^{2\pi i k/n}$ (k geheel, $0 \leq k < n$) in het complexe vlak de hoekpunten van een

regelmatige n -hoek, beschreven in de eenheidscirkel, vormen. Bereken de omtrek van deze n -hoek en bepaal de limiet waartoe deze nadert als $n \rightarrow \infty$.

Opgave 112. Bepaal voor een complex getal $a \neq 0$ en een natuurlijk getal n de complexe getallen z , waarvoor $z^n = a$ en bewijs dat dit juist de waarden zijn, die $a^{1/n}$ kan aannemen. Speciaal neemt $a^{1/2}$ twee waarden aan die elkaars tegengestelde zijn.

§26. De logaritmische reeks en de binomiaalreeks.

We willen $\log(1+z)$ in een reeks van Mac Laurin ontwikkelen. We kiezen de hoofdwaarde van $\log w$ (d.w.z. $\log 1 = 0$, $-\pi < \operatorname{Im} \log w \leq \pi$). De afgeleiden van $\log(1+z)$ hebben we al eerder bepaald (zie opgave 86; de resultaten blijven geldig omdat de complexe logaritmische dezelfde afgeleide heeft als de reële). Dus

$$\frac{d^n \log(1+z)}{dz^n} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(1+z)^n}. \text{ Dus } \operatorname{Log}(1+z) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{k!} z^k +$$

+ $R_n(z) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k} + R_n(z)$. Het is duidelijk dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$ An 98

convergentiestraal 1 heeft (ga dat na); we behoeven dus alleen waarden van z met $|z| \leq 1$ te onderzoeken. Voor $|z| < 1$ doen we dit met de restschatting van Cauchy. Deze geeft $|R_n(z)| \leq$

$$\leq \frac{|z|^n}{(n-1)!} \sup_{0 \leq \vartheta < 1} (1-\vartheta)^{n-1} \frac{(n-1)!}{|1+\vartheta z|^n} = |z|^n \sup_{0 \leq \vartheta < 1} \frac{(1-\vartheta)^{n-1}}{|1+\vartheta z|^n}. \text{ Nu is } |1+\vartheta z| \geq$$

$$\geq 1 + (\Re z)\vartheta \geq 1-\vartheta \text{ en } |1+\vartheta z| \geq 1 + (\Re z)\vartheta \geq 1-\Re z, \text{ dus } \frac{(1-\vartheta)^{n-1}}{|1+\vartheta z|^{n-1}} \leq$$

≤ 1 en $\frac{1}{|1+\vartheta z|} \leq \frac{1}{1-\Re z}$ dus $\sup_{0 \leq \vartheta < 1} \frac{(1-\vartheta)^{n-1}}{|1+\vartheta z|^n}$ is begrensd. Verder is

$\lim_{n \rightarrow \infty} |z|^n = 0$, dus $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(z) = 0$, dus de reeks stelt de functie voor.

Voor $|z| = 1$ proberen we het met de restschatting van Lagrange. Deze

geeft $|R_n(z)| \leq \frac{1}{n!} \sup_{0 \leq \vartheta < 1} \frac{(n-1)!}{|1+\vartheta z|^n} = \frac{1}{n} \sup_{0 \leq \vartheta < 1} \frac{1}{|1+\vartheta z|^n}$. Als $\Re z \geq 0$, is

$|1+\vartheta z| \geq 1 + (\Re z)\vartheta \geq 1$, dus $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(z) = 0$, dus de reeks stelt de functie voor.

(26.1) Voor alle complexe z , waarvoor $|z| < 1$ of waarvoor $|z| = 1$ en.

$\Re z \geq 0$, geldt $\text{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots$

(logarithmische reeks).

Speciaal geldt $\text{Log } 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$. Dit is een voorbeeld van een reeks die convergeert, maar niet absoluut convergeert.

Met andere hulpmiddelen is het mogelijk aan te tonen, dat de logarithmische reeks $\text{Log}(1+z)$ ook nog voorstelt voor alle complexe z , waarvoor $|z| = 1$, behalve $z = -1$. In het laatste geval is trouwens $\text{log}(1+z)$ niet gedefinieerd en is bovendien de logarithmische reeks divergent (het wordt het tegengestelde van de harmonische reeks).

Voor $|z| < 1$ geldt $\text{Log}(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-z)^n}{n} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$. Door aftrekking vinden we $\text{Log} \frac{1+z}{1-z} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{2n-1} = 2(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \dots)$.

We merken nog op dat deze formule door ons ook nog bewezen is voor $z = i$ en $z = -i$. Met deze formule kunnen we $\text{Log } u$ bepalen voor alle reële $u > 0$; stellen we n.l. $u = \frac{1+z}{1-z}$, dan is $z = \frac{u-1}{u+1}$ en dit is dan inderdaad gelegen tussen -1 en $+1$. Overigens blijkt de reeks voor enigszins grote u slechts zeer langzaam te convergeren.

In de numerieke wiskunde gebruikt men reeksontwikkelingen van functies om benaderde waarden van deze functies te berekenen door een aantal termen van de reeks uit te rekenen. De vraag rijst dan, hoe groot de fout is, die men dan maakt, of hoeveel termen van de reeks men moet gebruiken om een bepaalde nauwkeurigheid te bereiken. Om dit te beoordelen kunnen de restschattingen goede diensten bewijzen; deze geven

immers juist een schatting van de fout die men maakt als men de functie vervangt door een partiële som van zijn reeksontwikkeling. Laten we ons b.v. de opgave stellen $\text{Log } 2$ te berekenen in twee decimalen achter de komma nauwkeurig. Omdat de reeks $\text{Log } 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots$ zo slecht convergeert nemen we liever $-\text{Log } 2 = \text{Log } \frac{1}{2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$. Volgens Cauchy is

$$|R_n(z)| \leq |z|^n \sup \frac{(1-\vartheta)^{n-1}}{|1+\vartheta z|^n} \text{ en voor } z = -\frac{1}{2} \text{ wordt dit } \frac{1}{2^n} \sup \frac{(1-\vartheta)^{n-1}}{(1-\frac{\vartheta}{2})^n} <$$

$$< \frac{1}{2^n} \sup \frac{1}{1-\frac{\vartheta}{2}} < \frac{1}{2^{n-1}}. \text{ Om een nauwkeurigheid in twee decimalen te}$$

$n-1=8$, dus $n=9$ te kiezen. We nemen dus voor $\frac{1}{2}$ zijn. Het is voldoende daarvoor $= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{64} + \frac{1}{160} + \frac{1}{384} + \frac{1}{896} + \frac{1}{2048} = \frac{148969}{215040} = 0,693\dots$. De fout is kleiner dan $\frac{1}{256} = 0,004\dots$. Daar de reeks uit positieve termen bestaat is een partiële som kleiner dan de som, dus we kunnen zeggen dat $\text{Log } 2$ gelegen is tussen $0,693$ en $0,697$. (Met $\text{Log } \frac{1+z}{1-z}$ was het nog iets makkelijker gegaan).

Om een logarithmentafel te maken moet men in een zekere benauwde logartihmen bepalen van een stel rationale getallen. Op grond van de eigenschappen van de logarithme is het daarvoor voldoende de logarithmen van de natuurlijke en zelfs van de ondeelbare natuurlijke getallen (z.g. priemgetallen) te kennen. Om de logarithme van een priemgetal p te bepalen, als die van de kleinere priemgetallen al bekend zijn, kan men b.v. als volgt te werk gaan: $p = \frac{p-1}{1-\frac{1}{p}}$, dus $\text{Log } p = \text{Log } (p-1) -$

$-\text{Log } (1-\frac{1}{p})$. Nu is $p-1$ een product van priemfactoren $< p$ en $\text{Log } (p-1)$ dus bekend; $\text{Log } (1-\frac{1}{p})$ berekent men door in de reeks voor $\text{Log } (1-z)$ $z = \frac{1}{p}$ te substitueren. Voor niet te kleine p convergeert deze laatste reeks zeer goed. Voor $p > 2$ is dit procédé nog iets te verbeteren, want dan is ook $p+1$ een product van priemfactoren $< p$ en men stelt dan $p^2 = \frac{(p-1)(p+1)}{1-\frac{1}{p^2}}$. Voor kleine priemgetallen is dit procédé nog niet zo

bruikbaar (het bovenstaande voorbeeld leert ons dat daar voor een matige graad van nauwkeurigheid al een groot aantal termen van de reeks nodig is); voor deze bestaan echter nog andere kunstgrepen om de berekening te bekorten.

We geven nu nog een andere afleiding voor de reeksontwikkeling van $\text{Log } (1+z)$ die eenvoudiger is dan de bovenstaande, maar alleen voor $|z| <$

< 1 geldig is. De functies $\text{Log } (1+z)$ en $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}$ zijn beide voor

$|z| < 1$ differentieerbare functies. De eerste heeft afgeleide $\frac{1}{1+z}$; van de tweede kan de afgeleide bepaald worden door termsgewijs differentiëren, hetgeen $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$ levert. Maar $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n$ (meetkundige reeks); de beide functies hebben dus dezelfde afgeleide en zijn dus op een additieve constante na aan elkaar gelijk. Door $z = 0$ te substitueren ziet men dat die constante = 0 is, dus $\text{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}$ voor $|z| < 1$.

Dat deze afleiding mogelijk is beruht op het feit, dat de afgeleide van $\text{Log}(1+z)$ een zo eenvoudige functie is, dat de geldigheid van de reeksontwikkeling daarvoor onmiddellijk duidelijk is. Bij andere functies zal de methode meestal niet tot vereenvoudiging leiden.

We willen nu $(1+z)^\mu$ in een reeks van Mac Laurin ontwikkelen. We kiezen weer in $e^{\mu \log(1+z)}$ de hoofdwaarde van $\log(1+z)$. Nu is $\frac{d^n (1+z)^\mu}{dz^n} = \prod_{j=0}^{n-1} (\mu - j) (1+z)^{\mu-j}$. We definiëren nu een binomiaalcoëfficiënt

voor complexe μ en natuurlijke n door $\binom{\mu}{n} = \frac{\prod_{j=0}^{n-1} (\mu - j)}{n!}$. Verder $\binom{\mu}{0} = 1$. Dan is $(1+z)^\mu = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{\mu}{k} z^k + R_n(z)$. Als μ een natuurlijk getal of nul is ($\mu = m$), dan bevat voor $k > m$ $\binom{m}{k}$ een factor $m-m = 0$, dus dan is $\binom{m}{k} = 0$. De reeks wordt dan een eindige som. Voor $n > m$ is $R_n(z) = 0$. De reeks stelt dan voor alle complexe waarden van z de functie voor en we krijgen de uit de algebra bekende formule $(1+z)^m = \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} z^n$ (binomiaalformule van Newton). We sluiten het geval dat μ natuurlijk of 0 is verder uit. Dan is $\binom{\mu}{n} \neq 0$ voor alle n . We bepalen nu eerst de convergentiestraal van de reeks; noem $\Re \mu = \kappa$ en $\Im \mu = \lambda$, dus $\mu = \kappa + i\lambda$, κ en λ reëel. Nu is

$$\left| \frac{\binom{\mu}{n+1}}{\binom{\mu}{n}} \right| = \frac{|\mu - n|}{n+1} = \frac{\sqrt{(\kappa - n)^2 + \lambda^2}}{n+1} = \frac{\sqrt{n^2 - 2\kappa n + \kappa^2 + \lambda^2}}{n+1} \text{ en dit nadert } 1 \text{ tot } 1$$

als $n \rightarrow \infty$. De convergentiestraal is dus 1. Voor $|z| < 1$ beschouwen we nu de restschatting van Cauchy: $|R_n(z)| \leq \frac{|z|^n}{(n-1)!} \sup_{|\vartheta| \leq 1} (1 - \vartheta)^{n-1} n!$.

$$\begin{aligned} \cdot \left| \binom{\mu}{n} \right| |(1 + \vartheta z)^\mu|^{-n} &= n |z|^n \left| \binom{\mu}{n} \right| \sup_{|\vartheta| \leq 1} (1 - \vartheta)^{n-1} |(1 + \vartheta z)^\mu|^{-n} \\ &= |\mu| |z|^n \left| \binom{\mu-1}{n-1} \right| \sup_{|\vartheta| \leq 1} (1 - \vartheta)^{n-1} |(1 + \vartheta z)^\mu|^{-n}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Nu is } |(1 + \vartheta z)^\mu|^{-n} &= |e^{(\kappa - n + i\lambda)(\text{Log}|1 + \vartheta z| + i \arg(1 + \vartheta z))}|^{-n} \\ &= e^{(\kappa - n) \text{Log}|1 + \vartheta z| - \lambda \arg(1 + \vartheta z)} = |1 + \vartheta z|^{\kappa - n} e^{-\lambda \arg(1 + \vartheta z)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{maar } e^{-\lambda \arg(1 + \vartheta z)} &\leq e^{|\lambda| \pi}. \text{ Verder is } (1 - \vartheta)^{n-1} |1 + \vartheta z|^{\kappa - n} \\ &= \frac{(1 - \vartheta)^{n-1}}{|1 + \vartheta z|^{n-1}} |1 + \vartheta z|^{\kappa - 1} \text{ en dit is } \leq 2^{\kappa - 1} \text{ als } \kappa \geq 1 \text{ en } \leq (1 - |\Re z|)^{\kappa} \end{aligned}$$

als $\kappa < 1$. Verder is voor $|z| < 1$ de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{\mu-1}{n-1} z^{n-1}$ absoluut convergent, dus is $\lim_{n \rightarrow \infty} |z|^{n-1} \left| \binom{\mu-1}{n-1} \right| = 0$, dus $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(z) = 0$.

Hiermee is de volgende stelling verkregen.

$$(26.2) \text{ Voor alle complexe } z, \text{ waarvoor } |z| < 1, \text{ geldt } (1+z)^\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\mu}{n} z^n \text{ (binomiaalreeks).}$$

Het is mogelijk aan te tonen dat de binomiaalreeks de functie $(1+z)^\mu$ ook nog voorstelt als $|z| = 1$, $z \neq -1$, $\Re \mu > -1$. Verder blijkt de

binomiaalreeks divergent voor $|z| = 1$, $\Re \mu \leq -1$ en voor $z = -1$,

$$\Re \mu \leq 0, \mu \neq 0.$$

Opgave 113. Bereken $\sqrt[3]{3}$ tot op $\frac{1}{1000}$ nauwkeurig.

§ 27. Cyclometrische functies.

Als $\sin z_1 = \sin z_2$, dan is $0 = \sin z_2 - \sin z_1 = 2 \cos \frac{1}{2}(z_2 + z_1) \sin \frac{1}{2}(z_2 - z_1)$.

Dus $\frac{1}{2}(z_2 - z_1) = \frac{1}{2}\pi + n\pi$, d.w.z. $z_2 = \pi - z_1 + 2n\pi$ of $\frac{1}{2}(z_2 - z_1) = n\pi$, d.w.z. $z_2 = z_1 + 2n\pi$. Als we ons nu beperken tot die waarden van z waarvoor $-\frac{1}{2}\pi < \Re z < \frac{1}{2}\pi$, of $\Re z = \frac{1}{2}\pi$, $\Im z \leq 0$ of $\Re z = -\frac{1}{2}\pi$, $\Im z \geq 0$ dan is $\sin z$ blijk-

baar eeneenduidig; verder neemt $\sin z$ daar ook alle waarden aan die $\sin z$ in het algemeen kan aannemen. Neemt men namelijk een willekeurig complex getal z , dan kan men daar, zonder dat de waarde van $\sin z$ verandert, een dusdanig veelvoud van 2π bij optellen dat $-\frac{1}{2}\pi < \Re z < \frac{1}{2}\pi$; als dan $\frac{1}{2}\pi < \Re z < \frac{3}{2}\pi$, nemen we $\pi - z$, dan is daarvoor $-\frac{1}{2}\pi < \Re z < \frac{1}{2}\pi$; als $\Re z = \frac{1}{2}\pi$, $\Im z > 0$ nemen we ook $\pi - z$, dan is daarvoor $\Re z = \frac{1}{2}\pi$, $\Im z < 0$; als $\Re z = -\frac{1}{2}\pi$, $\Im z < 0$ nemen we $\pi - z - 2\pi = -\pi - z$, dan is daarvoor $\Re z = -\frac{1}{2}\pi$, $\Im z > 0$. Van de nu eeneenduidig gemaakte functie $w = \sin z$ vormen we de omkeersfunctie en noemen deze arcsin w . We weten nog niet voor welke waarde van w deze gedefinieerd is; we zullen aantonen dat dit voor alle complexe waarden van w het geval is. Blijkbaar is $\arcsin 1 = \frac{1}{2}\pi$, $\arcsin(-1) = -\frac{1}{2}\pi$. Verder geldt:

(27.1) Voor $w \neq 1$, $w \neq -1$ is $\arcsin w = \frac{1}{i} \log(iw + (1-w^2)^{\frac{1}{2}})$, mits in het rechterlid zowel bij $(1-w^2)^{\frac{1}{2}}$ als bij de logaritme de hoofdwaaarde gekozen wordt.

Bewijs: We tonen eerst aan dat voor alle $w \neq \pm 1$ het rechterlid gedefinieerd is. Nu is $(1-w^2)^{\frac{1}{2}}$ gedefinieerd mits $1-w^2 \neq 0$, d.w.z. $w \neq \pm 1$; de logaritme is gedefinieerd tenzij $iw + (1-w^2)^{\frac{1}{2}} = 0$. Als dat zo was, was $-w^2 = 1-w^2$ en dit is onmogelijk. Verder is

$$\sin\left(\frac{1}{i} \log(iw + (1-w^2)^{\frac{1}{2}})\right) = \frac{1}{2i} \left(iw + (1-w^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{iw + (1-w^2)^{\frac{1}{2}}} \right) =$$

$\frac{1}{2i} (iw + (1-w^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{(1-w^2)^{\frac{1}{2}} + iw}) = w$. Voor deze w is dus arcsin w gedefinieerd; noem $\arcsin w = z$, dan is $\sin z = w$ en we moeten bewijzen dat onder de veronderstellingen van (27.1) geldt $z = \frac{1}{i} \log(iw + (1-w^2)^{\frac{1}{2}})$. Nu is echter $\frac{1}{i} \log(iw + (1-w^2)^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{i} \log(i \sin z + (1-\sin^2 z)^{\frac{1}{2}}) =$
 $= \frac{1}{i} \log((\cos^2 z)^{\frac{1}{2}} + i \sin z)$. Nu is $(\cos^2 z)^{\frac{1}{2}} = \cos z$ of $= -\cos z$. We zullen nu bewijzen, dat het eerste het geval is. Daartoe splitsen we eerst voor een willekeurige z $\sin z$ en $\cos z$ in hun reële en imaginaire delen. Noem $z = x + iy$, dan is $iz = -y + ix$, $e^{iz} = e^{-y}(\cos x + i \sin x)$, $e^{-iz} = e^y(\cos x - i \sin x)$, dus
 $\cos z = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) \cos x - i \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) \sin x$, $\sin z = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) \sin x +$

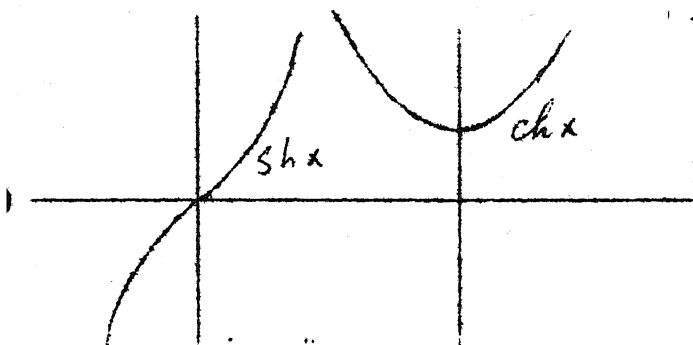
+ $i \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) \cos x$. We voeren nu twee nieuwe functies in genaamd sinus hyperbolicus en cosinus hyperbolicus (afkorting sh en ch) gedefinieerd door

$$\text{sh } z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}).$$

$$\text{ch } z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}).$$

$$(27.2) \quad \sin z = \text{ch}(\Im z) \sin(\Re z) + i \text{sh}(\Im z) \cos(\Re z),$$

$$\cos z = \text{ch}(\Im z) \cos(\Re z) - i \text{sh}(\Im z) \sin(\Re z).$$



Voor reële x is $\text{ch } x > 1$, want

$$\text{ch } z - 1 = \frac{(e^z - 1)^2}{2e^z}; \text{ voor reële } x$$

heeft $\text{sh } x$ hetzelfde teken als x ,

$$\text{want } \text{sh } z = \frac{e^{2z} - 1}{2e^z}. \text{ De grafieken van}$$

$\text{sh } x$ en $\text{ch } x$ zijn hiernaast geschetst.

Opgave 114. Bewijs $\sin z = -i \text{sh}(iz)$, $\text{sh } z = -i \sin(iz)$,
 $\cos z = \text{ch}(iz)$, $\text{ch } z = \cos(iz)$.

(Met behulp hiervan kan men uit formules voor $\sin$ en $\cos$ formules voor sh en ch maken).

Opgave 115. Bepaal de reeksontwikkelingen van $\text{sh } z$ en $\text{ch } z$.

Keren we nu terug tot ons oorspronkelijke bewijs, dan moeten we aantonen dat de hoofdwaarde van $(1-w^2)^{\frac{1}{2}}$ gelijk is aan $\cos z$ en niet aan $-\cos z$. Voor de hoofdwaarde is $-\pi < \Im(\log(1-w^2)) \leq \pi$, dus $-\frac{1}{2}\pi < \Im(\frac{1}{2}\log(1-w^2)) \leq \frac{1}{2}\pi$, dus $\Re((1-w^2)^{\frac{1}{2}}) =$

$$= e^{\frac{1}{2}\log|1-w^2|} \cos(\Im(\frac{1}{2}\log(1-w^2))) \geq 0. \text{ Verder volgt uit (27.2) en}$$

uit $-\frac{1}{2}\pi < \Re z \leq \frac{1}{2}\pi$ dat ook $\Re(\cos z) \geq 0$. Als het > 0 is, zijn

we klaar. Als het $= 0$ is, is $\Im(\frac{1}{2}\log(1-w^2)) = \frac{1}{2}\pi$ en $\Im((1-w^2)^{\frac{1}{2}}) =$

$= e^{\frac{1}{2}\log|1-w^2|} > 0$. verder is daar $\Re \cos z = 0$, dus $\Re z = \frac{1}{2}\pi$ of $\Re z = -\frac{1}{2}\pi$. In het eerste geval is $\Im z < 0$, dus $\Im \cos z = -\text{sh}(\Im z) > 0$, in het tweede geval is $\Im z > 0$, dus $\Im \cos z = \text{sh}(\Im z) > 0$. Daarmee is

bewezen dat $(1-w^2)^{\frac{1}{2}} = \cos z$ en $\frac{1}{2}\log(iw + (1-w^2)^{\frac{1}{2}}) =$

$= \frac{1}{2}\log(\cos z + i \sin z) = \frac{1}{2}\log e^{iz} = z$ bij de keuze van de hoofdwaarde van de log, want $\Im(iz) = \Re z$ ligt tussen $-\frac{1}{2}\pi$ en $\frac{1}{2}\pi$.

Hiermee is (27.1) bewezen.

Uit (27.1) volgt nu dat voor $w \neq \pm 1$ $\arcsin w$ ook differentieerbaar is. De afgeleide is (noem $\arcsin w = z$): $\frac{d \arcsin w}{dw} = \frac{1}{\frac{d \sin z}{dz}} = \frac{1}{\cos z} =$

$$= \frac{1}{(1-w^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

$$(27.3) \frac{d \arcsin w}{dw} = (1-w^2)^{-\frac{1}{2}} \text{ (hoofdwaarde in het rechterlid).}$$

Opgave 116. Bereken $\frac{d \arcsin w}{dw}$ rechtstreeks uit de formule in (27.1).

Om de reeksontwikkeling van $\arcsin w$ te bepalen, bepalen we eerst die van $(1-w^2)^{-\frac{1}{2}}$. Dit wordt $(1-w^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n w^{2n}$ voor $|w| < 1$. Nu heeft $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n \frac{w^{2n+1}}{2n+1}$ voor $|w| < 1$ dezelfde afgeleide als $\arcsin w$

en stemt er dus op een additieve constanten na overeen. Maar $\arcsin 0 = 0$ en de reeks wordt voor $w = 0$ ook 0, dus de reeks stelt $\arcsin w$ voor voor $|w| < 1$. Verder geldt:

$$(27.4) \binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}} \binom{2n-1}{n} \text{ voor } n \geq 1.$$

Opgave 117. Bewijs (27.4).

$$(27.5) \text{ Voor } |w| < 1 \text{ geldt } \arcsin w = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n \frac{w^{2n+1}}{2n+1} = w + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n-1}{n} \frac{w^{2n+1}}{(2n+1)2^{2n-1}} = w + \frac{1}{6} w^3 + \frac{3}{40} w^5 + \frac{5}{112} w^7 + \frac{35}{1152} w^9 + \dots$$

Nu is $\sin \frac{1}{6} \pi = \frac{1}{2}$, want $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$ (ga dat na), en dus als $\sin x = \frac{1}{2}$, dan $\sin 3x = 1$. Omdat $\sin 0 = 0$, $\sin \frac{1}{2} \pi = 1$ is er een x met $0 < x < \frac{1}{2} \pi$ waarvoor $\sin x = \frac{1}{2}$; voor die x is echter $0 < 3x < \frac{3}{2} \pi$ en de enige y met $0 < y < \frac{3}{2} \pi$ waarvoor $\sin y = 1$, is $\frac{1}{2} \pi$.

Dus $\sin \frac{1}{6} \pi = \frac{1}{2}$, dus $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \pi$.

$$(27.6) \frac{1}{6} \pi = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n-1}{n} \frac{1}{(2n+1)2^{2n}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{48} + \frac{3}{1280} + \frac{5}{14336} + \dots$$

De behandeling van de omkering van $\cos z$ brengen we terug op die van $\sin z$ met behulp van $\cos z = \sin(\frac{1}{2} \pi - z)$. Als $-\frac{1}{2} \pi < \Re(\frac{1}{2} \pi - z) < \frac{1}{2} \pi$ of $\Re(\frac{1}{2} \pi - z) = \frac{1}{2} \pi$, $\Im(\frac{1}{2} \pi - z) < 0$ of $\Im(\frac{1}{2} \pi - z) = -\frac{1}{2} \pi$, $\Im(\frac{1}{2} \pi - z) > 0$ is $\sin(\frac{1}{2} \pi - z)$ eeneenduidig en neemt alle complexe waarden aan. Dus als $0 < \Re z < \pi$ of $\Re z = 0$, $\Im z \geq 0$ of $\Re z = \pi$, $\Im z \leq 0$ is $\cos z$ eeneenduidig en neemt alle complexe waarden aan. Noem de omkering $\arccos w$, dan volgt uit $z = \arccos w$, dat $\frac{1}{2} \pi - z = \arcsin w$ dus:

$$(27.7) \arccos w = \frac{1}{2} \pi - \arcsin w.$$

$$(27.8) \frac{d \arccos w}{dw} = - (1-w^2)^{-\frac{1}{2}} \text{ (hoofdwaarde in het rechterlid).}$$

We definiëren $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$, gedefinieerd voor $z \neq \frac{1}{2} \pi + n \pi$, dus

$$\operatorname{tg} z = \frac{1}{i} \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}.$$

$$(27.9) \frac{d \operatorname{tg} z}{dz} = 1 + \operatorname{tg}^2 z.$$

Er geldt $\operatorname{tg} z_1 + \operatorname{tg} z_2$ als $\sin z_1 \cos z_2 = \cos z_1 \sin z_2$, dus als $\sin(z_2 - z_1) = 0$, $z_2 = z_1 + n \pi$. Als we ons beperken tot $-\frac{1}{2} \pi < \Re z < \frac{1}{2} \pi$, $z \neq$

$\neq \frac{1}{2}\pi$ is $\operatorname{tg} z$ eeneenduidig en neemt alle waarden aan die $\operatorname{tg} z$ aan kan nemen. We noemen de omkering van $\operatorname{tg} z$ nu $\operatorname{arctg} w$. Er is geen z waarvoor $\operatorname{tg} z = i$ of $\operatorname{tg} z = -i$ is. (Ga dat na).

(27.10) Voor $w \neq \pm i$ is $\operatorname{arctg} w = \frac{1}{2i} \log \frac{1+iw}{1-iw}$, mits in het rechterlid voor de logaritmische de hoofdwaaarde genomen wordt.

Bewijs: Het rechterlid heeft zin want $1-iw \neq 0$ en $1+iw \neq 0$. Verder is

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2i} \log \frac{1+iw}{1-iw}\right) = \frac{1}{i} \frac{\frac{1+iw}{1-iw} - 1}{\frac{1+iw}{1-iw} + 1} = w. \text{ Voor deze } w \text{ is } \operatorname{arctg} w \text{ gedefinieerd.}$$

Daar voor de hoofdwaaarde van de log geldt $-\frac{1}{2}\pi < \operatorname{Im}\left(\frac{1}{2i} \log \frac{1+iw}{1-iw}\right) < \frac{1}{2}\pi$, is $\operatorname{arctg} w = \frac{1}{2i} \log \frac{1+iw}{1-iw}$.

$$\text{Verder is } \frac{d \operatorname{arctg} w}{dw} = \frac{1}{\frac{d \operatorname{tg} z}{dz}} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 z} = \frac{1}{1+w^2}.$$

$$(27.11) \quad \frac{d \operatorname{arctg} w}{dw} = \frac{1}{1+w^2}.$$

Om de reeksontwikkeling van $\operatorname{arctg} w$ te krijgen, gebruiken we de reeks-

$$\text{ontwikkeling van } \log \frac{1+z}{1-z} \text{ voor } z = iw, \text{ dus } \operatorname{arctg} w = \frac{1}{2i} 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(iw)^{2n-1}}{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} w^{2n-1}}{2n-1}.$$

$$(27.12) \text{ Voor } |w| < 1 \text{ geldt } \operatorname{arctg} w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n w^{2n+1}}{2n+1} = w - \frac{w^3}{3} + \frac{w^5}{5} - \frac{w^7}{7} + \dots$$

We maken nu gebruik van het feit, dat we bewezen hebben dat de reeksontwikkeling van $\log \frac{1+z}{1-z}$ ook nog geldt voor $z = 1$. De reeksontwikkeling van $\operatorname{arctg} w$ geldt dus ook nog voor $w = 1$. Omdat $\sin \frac{1}{4}\pi = \sin\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}\pi\right) = \cos \frac{1}{4}\pi$, is $\operatorname{tg} \frac{1}{4}\pi = 1$, dus $\operatorname{arctg} 1 = \frac{1}{4}\pi$. Dus

$$(27.13) \quad \frac{1}{4}\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Een goed convergente reeks voor π krijgt men door $\frac{1}{4}\pi = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}$ in een reeks te ontwikkelen.

§28. De hoofdstelling van de algebra.

(28.1) Als $f(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$, $n \geq 1$, a_j complex, $a_n \neq 0$, dan is er een complex getal z_0 waarvoor $f(z_0) = 0$.

Bewijs: Stel $g(z) = \frac{1}{a_n} f(z) = \sum_{j=0}^n \frac{a_j}{a_n} z^j = \sum_{j=0}^n b_j z^j$, $b_n = 1$. Het is voldoende te bewijzen, dat er een z_0 is waarvoor $g(z_0) = 0$, want dan is ook $f(z_0) = 0$. Als $b_0 = 0$, dan is $g(0) = 0$, dus kunnen we $z_0 = 0$ kiezen. Stel nu $b_0 \neq 0$. Noem $R = \sum_{j=1}^n |b_j| + 1 + |b_0|$, dan is $R > 1$. Voor $|z| = R$ geldt dan $|g(z)| = \left| z^n + \sum_{j=0}^{n-1} b_j z^j \right| \geq |z|^n - \sum_{j=0}^{n-1} |b_j| |z|^j \geq |z|^n - |z|^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} |b_j| = |z|^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} |b_j| + 1 + |b_0| - \sum_{j=0}^{n-1} |b_j| \right) = |z|^{n-1} (1 + |b_0|) > 0$

$\geq 1 + |b_0| > |b_0|$ voor $|z| \leq R$ is $|g(z)|$ een continue functie, gedefinieerd op een compacte ruimte, die uitsluitend reële waarden aanneemt en dus een minimum heeft. Laat z_0 een punt zijn waar $|g(z)|$ minimaal is. Voor $|z| = R$ is evenwel $|g(z)| > |b_0|$; verder is $|g(0)| = |b_0|$, dus $|z_0| < R$. Voor alle complexe getallen z , waarvoor $|z - z_0| < R - |z_0|$ is dus $|g(z)| \geq |g(z_0)|$. We willen bewijzen, dat $g(z_0) = 0$. Neem $z - z_0 = w$, dus $z = w + z_0$, dan is $g(z) = \sum_{j=0}^n b_j z^j = \sum_{j=0}^n b_j (z_0 + w)^j = \sum_{j=0}^n b_j \sum_{m=0}^j \binom{j}{m} z_0^{j-m} w^m = \sum_{m=0}^n \left(\sum_{j=m}^n b_j \binom{j}{m} z_0^{j-m} \right) w^m = \sum_{m=0}^n c_m w^m = h(w)$. Dan is $h(0) = g(z_0)$ en voor $|w| < R - |z_0|$ is $|h(w)| \geq |h(0)|$. Verder is $c_n = \sum_{j=n}^n b_j \binom{j}{n} z_0^{j-n} = b_n \neq 0$. We moeten dus bewijzen dat $h(0) = 0$. Stel $h(0) \neq 0$, maar $h(0) = c_0$, dus $c_0 \neq 0$. Omdat $c_n \neq 0$ is er een kleinste natuurlijk getal k , waarvoor $c_k \neq 0$. Als $k < n$, dan is $h(w) = c_0 + c_k w^k + \sum_{j=k+1}^n c_j w^j$; als $k = n$, dan is $h(w) = c_0 + c_n w^n$. Omdat $c_0 \neq 0$, is er een reëel getal α te vinden, zodat $c_0 = |c_0| e^{i\alpha}$; omdat $c_k \neq 0$, is er een reëel getal β te vinden, zodat $c_k = |c_k| e^{i\beta}$. Neem nu $w = r e^{i \frac{\alpha - \beta + \pi}{k}}$, waarin r reëel > 0 nog nader te bepalen is. Voor die w is $c_0 + c_k w^k = |c_0| e^{i\alpha} + |c_k| e^{i\beta} r^k e^{i(\alpha - \beta + \pi)} = e^{i\alpha} (|c_0| - |c_k| r^k)$, dus $|c_0 + c_k w^k| = ||c_0| - |c_k| r^k|$. Voor $k < n$ kiest men r zo dat $0 < r < \min(1, R - |z_0|, \frac{|c_0|}{|c_k|}, \frac{|c_0|}{\sum_{j=k+1}^n |c_j|})$, voor $k = n$ zo dat $0 < r < \min(1, R - |z_0|, \frac{|c_0|}{|c_n|})$. Dan is $r^k < \frac{|c_0|}{|c_k|}$, dus $|c_0| - |c_k| r^k > 0$. Verder is voor $k < n$: $r^{k+1} \sum_{j=k+1}^n |c_j| < \frac{1}{2} |c_k| r^k$. Voor $k < n$ is nu $|h(w)| \leq |c_0 + c_k w^k| + r^{k+1} \sum_{j=k+1}^n |c_j| < |c_0| - |c_k| r^k + \frac{1}{2} |c_k| r^k = |c_0| - \frac{1}{2} |c_k| r^k < |c_0| = |h(0)|$; voor $k = n$ is $|h(w)| = |c_0 + c_n w^n| = |c_0| - |c_n| r^n < |c_0| = |h(0)|$. Omdat $r < R - |z_0|$ is, is echter $|h(w)| \geq |h(0)|$. Dit geeft een tegenspraak; dus $h(0) = 0$, waarmee de stelling bewezen is.

§29 Reeksen. Voorwaardelijke convergentie.

Een reeks heet voorwaardelijk convergent als hij convergent, maar niet absoluut convergent is. Een voorbeeld is de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ die convergent is met som $\log 2$, maar niet absoluut convergent want $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ is divergent. De tot nu toe behandelde convergentiecriteria leverden steeds absolute convergentie en kunnen dus op voorwaardelijk convergente reeksen niet toegepast worden. Een hulpmiddel om convergentie voor voorwaardelijk convergente reeksen aan te tonen, is partiële sommatie. Stel twee rijen a_n en b_n en noem $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$, dan is $a_n = A_n - A_{n-1}$ voor $n > 1$ en $a_1 = A_1$. Nu is $\sum_{n=1}^N a_n b_n = A_1 b_1 + \sum_{n=2}^N (A_n - A_{n-1}) b_n = A_1 b_1 + \sum_{n=2}^N A_n b_n - \sum_{n=2}^N A_{n-1} b_n = \sum_{n=1}^N A_n (b_n - b_{n+1}) + A_N b_N$. Als nu de rij A_n begrensd is en b_n reëel, antitoon en begrensd dan is de reeks $\sum A_n (b_n - b_{n+1})$ convergent, want $|A_n| < C$, $b_n > b$ en $b_n - b_{n+1} \geq 0$ dus $\sum_{k=1}^n |A_k (b_k - b_{k+1})| \leq C \sum_{k=1}^n (b_k - b_{k+1}) = C(b_1 - b_{n+1}) \leq C(b_1 - b)$ en dit is begrensd dus de

reeks is absoluut convergent. Om te bewerkstelligen, dat $\sum a_n b_n$ convergeert, moeten we nog wat erbij eisen, b v. dat $\sum a_n$ convergeert (dat $\sum b_n$ convergeert volgt al uit de vroegere eisen) of dat $\sum a_n$ begrensd is en b_n naar nul convergeert. Dit geeft de volgende criteria:

(29.1) (Convergentie criterium van Abel) Als $\sum a_n$ convergeert en b_n is reëel, antitoon en begrensd, dan convergeert $\sum a_n b_n$.

(29.2) (Convergentie criterium van Dirichlet) Als $\sum a_n$ begrensd is en b_n is reëel, antitoon en convergent met limiet 0, dan convergeert $\sum a_n b_n$.

Een reeks $\sum c_n$ heet alternerend, als alle c_n reëel zijn en $c_{2n} \geq 0$, $c_{2n+1} \leq 0$, of $c_{2n} \leq 0$, $c_{2n+1} \geq 0$ (de reeks heeft dus om beurten een term ≥ 0 en een term ≤ 0). Uit het criterium van Dirichlet volgt nu gemakkelijk:

(29.3) (Convergentie criterium van Leibniz) Als $\sum c_n$ alternerend is en $|c_n|$ is antitoon en convergent met limiet nul, dan is $\sum c_n$ convergent. Bovendien geldt, dat, als C_n een partiële som van $\sum c_n$ voorstelt en C de som, uit $c_n > 0$ volgt $C_n \geq C$, uit $c_n < 0$ volgt $C_n \leq C$ en uit $c_n = 0$ volgt $C_n = C$.

Bewijs: Neem het geval $c_{2n} \geq 0$, $c_{2n+1} \leq 0$ (het andere geval gaat analoog). Dan is $c_n = (-1)^n |c_n|$. Noem nu $a_n = (-1)^n$ en $b_n = |c_n|$, dan is $A_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2}$ dus $A_n \leq 1$, dus A_n begrensd. Het criterium van Dirichlet geeft ons de convergentie van $\sum c_n$. Als $c_n = 0$, dan is ook $c_m = 0$ voor $m > n$, dus $C_m = C$. Als $c_n > 0$, dan is $n = 2m$. Voor $k > m$ geldt dan $C_{2k} = C_n + \sum_{j=2m+1}^{2k} c_j = C_n + \sum_{j=m+1}^k (c_{2j-1} + c_{2j}) = C_n - \sum_{j=m+1}^k (|c_{2j-1}| - |c_{2j}|) \leq C_n$, dus $C \leq C_n$. Als $c_n < 0$, dan is $n = 2m+1$. Voor $k > m$ geldt dan $C_{2k+1} = C_n + \sum_{j=2m+2}^{2k+1} c_j = C_n + \sum_{j=m+1}^k (c_{2j} + c_{2j+1}) = C_n + \sum_{j=m+1}^k (|c_{2j}| - |c_{2j+1}|) \geq C_n$, dus $C \geq C_n$.

Opgave 118. Voor welke reële waarden van x zijn de reeksen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ en $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ convergent?

Een reeks $\sum b_n$ heet een verschuiving van de reeks $\sum a_n$ als er een eeneenduidige afbeelding $\varphi(n)$ van de verzameling der natuurlijke getallen op zichzelf bestaat, zodat $b_n = a_{\varphi(n)}$. (De reeks $\sum b_n$ bestaat dus uit dezelfde termen als de reeks $\sum a_n$, maar "in een andere volgorde") Het is duidelijk dat dan ook omgekeerd $\sum a_n$ een verschuiving van de reeks $\sum b_n$ is ($a_m = b_{\psi(m)}$, $\varphi(\psi(m)) = m$, $\psi(\varphi(n)) = n$).

(29.4) Als $\sum a_n$ absoluut convergent is en $\sum b_n$ is een verschuiving van $\sum a_n$, dan is $\sum b_n$ ook absoluut convergent en de som van $\sum b_n$ is dezelfde als die van $\sum a_n$.

Bewijs: Bij $\epsilon > 0$ is wegens de absolute convergentie van $\sum a_n$ een N_1 te vinden, zodat voor $n > N_1$ geldt $\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| < \frac{\epsilon}{2}$. Als A de som van $\sum a_n$ is, is er een N_2 te vinden, zodat voor $n > N_2$ geldt $|A - \sum_{k=1}^n a_k| < \frac{\epsilon}{2}$. Laat nu $b_n = a_{\varphi(n)}$, $a_m = b_{\psi(m)}$ zijn. Noem $N = \max(N_1, N_2) + 1$ en $M = \max_{1 \leq m \leq N} k$ voor $k = \varphi(m)$. Voor $n > M$ geldt dan $|\sum_{k=1}^n b_k - \sum_{m=1}^N a_m| \leq \sum_{1 \leq k \leq n, \varphi(k) \leq N} |a_{\varphi(k)}| \leq \sum_{m=1}^N |a_m| < \frac{\epsilon}{2}$. Dus voor $n > M$ geldt $|\sum_{k=1}^n b_k - A| < \epsilon$.

$|A - \sum_{k=1}^n b_k| < \varepsilon$, dus $\sum b_n$ convergeert met som A . Om te bewijzen dat $\sum b_n$ zelfs absoluut convergeert, bedenken we dat $\sum |b_n|$ ook een verschikking van $\sum |a_n|$ is en passen we hierop het reeds bewezen gedeelte van onze stelling toe, hetgeen geeft dat $\sum |b_n|$ convergent, dus $\sum b_n$ absoluut convergent is.

Voor voorwaardelijk convergente reeksen geldt deze stelling niet; zelfs geldt daarvoor de volgende stelling, die in zekere zin als het tegengestelde van de vorige stelling op te vatten is:

(29.5) (Stelling van Riemann) Bij een voorwaardelijk convergente reeks $\sum a_n$ met reële termen is een verschikking te vinden, die divergeert, en is bij ieder willekeurig reëel getal σ een verschikking te vinden, die convergeert met som σ .

Bewijs: We tonen eerst aan dat $\sum a_n$ oneindig veel positieve en oneindig veel negatieve termen bevat. Stel n.l. dat er slechts eindig veel negatieve termen zijn, dan is er een N_1 , zodat voor $n > N_1$ geldt $a_n \geq 0$. Omdat $\sum a_n$ convergent is, is er bij $\varepsilon > 0$ een N zodat voor $n > N$ geldt $|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k| < \varepsilon$. Voor $n > \max(N, N_1)$ geldt echter $|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k| = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|$, maar hieruit volgt dat $\sum a_n$ absoluut convergent is, hetgeen niet het geval is. Evenzo bewijst men dat er oneindig veel positieve termen zijn. We splitsen nu de reeks $\sum a_n$ in twee reeksen $\sum b_n$ en $\sum c_n$ bestaande uit die termen van $\sum a_n$ die ≥ 0 resp. < 0 zijn, als volgt: $b_1 = a_{\varphi(1)}$, waarin $\varphi(1) = \min_{a_k \geq 0} k$; dit minimum bestaat omdat de verzameling der k waarvoor $a_k \geq 0$ niet leeg (en zelfs oneindig) is. Als $b_n = a_{\varphi(n)}$ gevonden is, definiëren we $b_{n+1} = a_{\varphi(n+1)}$, waarin $\varphi(n+1) = \min_{\substack{k > \varphi(n) \\ a_k \geq 0}} k$; dit minimum bestaat omdat de verzameling der k waarvoor $a_k \geq 0$ oneindig is. Evenzo vinden we $c_1 = a_{\psi(1)}$, waarin $\psi(1) = \min_{a_k < 0} k$, $c_{n+1} = a_{\psi(n+1)}$, waarin $\psi(n+1) = \min_{\substack{k > \psi(n) \\ a_k < 0}} k$. Daar $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ en $\psi(n+1) > \psi(n)$, zijn b_n en c_n deelrijen van a_n . Daar $b_n \geq 0$ en $c_n < 0$ voor alle n hebben b_n en c_n geen termen van a_n gemeen. Verder komt iedere term van a_n in b_n of c_n voor, d.w.z. bij iedere n is een k te vinden, zodat $n = \varphi(k)$ of $n = \psi(k)$ is. We nemen het geval dat $a_n \geq 0$ (het andere geval gaat analoog). Omdat $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n$, is er een kleinste m waarvoor $\varphi(m) > n$. Nu is $m > 1$, want uit $\varphi(1) > n$ volgt $a_n < 0$; verder is $\varphi(m-1) \leq n$. Als $\varphi(m-1) < n$, dan volgt uit $a_n \geq 0$, dat $\varphi(m) \leq a_n$, hetgeen niet het geval is. Dus $\varphi(m-1) = n$. We bewijzen nu dat de reeksen $\sum b_n$ en $\sum c_n$ divergent zijn. We geven weer, zoals gewoonlijk, de partiële som van een reeks aan met de corresponderende hoofdletter, dus b.v. de partiële som van $\sum a_n$ met A_n enz. Verder $\sum_{k=1}^n |a_k| = A_n^*$. Dan is $B_n = \frac{1}{2} (A_{\varphi(n)} + A_{\varphi(n)}^*)$. Immers $\frac{1}{2} (A_{\varphi(n)} + A_{\varphi(n)}^*) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\varphi(n)} (a_k + |a_k|)$ en hieruit vallen alle termen, waarvoor $a_k < 0$, weg en de termen, waarvoor $a_k \geq 0$, zijn gelijk aan a_k .

Het bewijs van de betrekking is nu makkelijk met volledige inductie te leveren (ga dit na). Wegens de voorwaardelijke convergentie van $\sum a_n$ is $A_{\psi(n)}$ convergent en $A_{\varphi(n)}^*$ divergent dus B_n divergent. Op analoge wijze bewijst men de divergentie van $\sum c_n$ met de betrekking $C_n = \frac{1}{2} (A_{\psi(n)} - A_{\varphi(n)}^*)$. We willen nu een verschikking van $\sum a_n$ construeren, die naar σ convergeert. Daartoe kiezen we eerst zoveel termen uit $\sum b_n$ dat de som $\geq \sigma$ wordt, daarna zoveel van $\sum c_n$ dat de som $< \sigma$ wordt, daarna weer van $\sum b_n$ dat de som weer $\geq \sigma$ wordt enz. Dit gaat als volgt: bepaal $n_1 = \min_{B_n \geq \sigma} n$ dit is mogelijk wegens de divergentie van $\sum b_n$. Dan is $B_{n_1} - \sigma = B_{n_1-1} + b_{n_1} - \sigma < b_{n_1}$ (dit hoeft niet te gelden als $n_1 = 1$). Kies $d_n = b_n$ voor $n \leq n_1$. Bepaal nu $m_1 = \min_{C_m < \sigma - B_{n_1}} m$; dit is mogelijk wegens de divergentie van $\sum c_n$. Dan is $\sigma - B_{n_1} - C_{m_1} = \sigma - B_{n_1} - C_{m_1-1} - c_{m_1} \leq -c_{m_1}$. Kies $d_n = c_{n-n_1}$ voor $n_1 < n \leq n_1 + m_1$, dan is $D_n = B_{n_1} + C_{n-n_1}$ voor die n . Laat nu n_k en m_k gevonden zijn, zodat $B_{n_k} + C_{m_k} < \sigma$ en d_n voor $n \leq n_k + m_k$ zodat $D_{n_k + m_k} = B_{n_k} + C_{m_k}$. Bepaal $n_{k+1} = \min_{B_n \geq \sigma - C_{m_k}} n$ (dit kan wegens de divergentie van $\sum b_n$) dan is $n_{k+1} > n_k$, want voor $n \leq n_k$ is $B_n + C_{m_k} \leq B_{n_k} + C_{m_k} < \sigma$. Verder is $B_{n_{k+1}} + C_{m_k} - \sigma = B_{n_{k+1}-1} + b_{n_{k+1}} + C_{m_k} - \sigma < b_{n_{k+1}}$. Kies $d_n = b_{n-m_k}$ voor $n_k + m_k < n \leq n_{k+1} + m_k$, dan is $D_n = D_{n_k+m_k} + \sum_{j=n_k+m_k+1}^{n-m_k} d_j = B_{n_k} + C_{m_k} + \sum_{j=n_k+m_k+1}^{n-m_k} b_j = B_{n-m_k} + C_{m_k}$ voor die n . Bepaal verder $m_{k+1} = \min_{C_m < \sigma - B_{n_{k+1}}} m$ (dit kan wegens de divergentie van $\sum c_n$), dan is $m_{k+1} > m_k$; want voor $m \leq m_k$ is $B_{n_{k+1}} + C_m \geq B_{n_{k+1}} + C_{m_k} \geq \sigma$. Verder is $\sigma - B_{n_{k+1}} - C_{m_{k+1}} = \sigma - B_{n_{k+1}} - C_{m_{k+1}-1} - c_{m_{k+1}} \leq -c_{m_{k+1}}$. Kies $d_n = c_{n-n_{k+1}}$ voor $n_{k+1} < n \leq n_{k+1} + m_{k+1}$, dan is $D_n = D_{n_{k+1}+m_k} + \sum_{j=n_{k+1}+m_k+1}^{n-n_{k+1}} d_j = B_{n_{k+1}} + C_{m_k} + \sum_{j=n_{k+1}+m_k+1}^{n-n_{k+1}} c_j = B_{n_{k+1}} + C_{n-n_{k+1}}$. Hiermee is een rij d_n geconstrueerd. Iedere d_n is een term van $\sum b_n$ of van $\sum c_n$. Omgekeerd komen ook iedere b_n en c_n in de rij d_n voor; immers uit $n_k \geq k$ volgt, dat $\min_{n \geq n_k} n = k$ bestaat; dan is $n_{k-1} < n \leq n_k$ en dan is $d_{n+m_{k-1}} = b_n$. Evenzo voor c_n . Hieruit volgt direct dat $\sum d_n$ een verschikking van $\sum a_n$ is. Tenslotte bewijzen we dat $\sum_{n=1}^{\infty} d_n = \sigma$. Omdat b_n en c_n deelrijen van a_n zijn geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$. Bij $\varepsilon > 0$ is dus een N_1 te vinden zodat voor $n > N_1$ geldt $|b_n| = b_n < \varepsilon$ en $|c_n| = -c_n < \varepsilon$. Hierbij is een k zodat $n_k > N_1$ en $m_k > N_1$ (b.v. $k = N_1 + 1$). Noem nu $N = n_k + m_k$, dus is bij $n > N$ een l te vinden zodat $n_1 + m_1 < n \leq n_{l+1} + m_{l+1}$ of $n_{l+1} + m_1 < n \leq n_{l+1} + m_{l+1}$; dan is $l \geq k$. In het eerste geval is d_n een term uit $\sum b_n$, in het tweede geval uit $\sum c_n$. We nemen het eerste geval (het tweede gaat analoog). dan is $D_n = B_n$ voor $n \leq n_1$.

Dan is $D_n - \sigma \geq D_{n_1+m_1} - \sigma = B_{n_1} + C_{m_1} - \sigma \geq c_{m_1} > -\varepsilon$ en $D_n - \sigma \leq D_{n_1+1+m_1} - \sigma = B_{n_1+1} + C_{m_1} - \sigma < b_{n_1+1} < \varepsilon$, dus $|D_n - \sigma| < \varepsilon$, dus $\sum_{k=1}^{\infty} d_k = \sigma$. Door een analoge redenering kan een reeks gevonden worden, die naar $+\infty$ of $-\infty$ divergeert of waarvan de partiële sommen tussen twee vaste grenzen heen en weer oscilleren.

Opgave 119. Bewijs dat de reeks $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots$ convergeert met som $\frac{1}{2} \log 2$.

§ 30. Het product van twee reeksen.

We gaan uit van twee reeksen $\sum a_n$ en $\sum b_n$ met partiële sommen A_n resp. B_n gerekend van index 0 af. Nu is $A_n B_n = \sum_{j=0}^n a_j \sum_{k=0}^n b_k = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n a_j b_k$. Dit bestaat dus uit alle producten $a_j b_k$ met $j \leq n$ en $k \leq n$. We willen nu een reeks vormen met deze grootheden als termen. We moeten echter een afspraak maken in welke volgorde we ze zullen nemen. Deze afspraak ontleenen we aan een analogie met machtreeksen. Neem de machtreeksen $\sum a_n x^n$ en $\sum b_n x^n$, dan is $\sum_{j=0}^n a_j x^j \sum_{k=0}^n b_k x^k = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n a_j b_k x^{j+k} = \sum_{j=0}^n \sum_{k=j}^n a_j b_{k-j} x^k = \sum_{k=0}^{2n} \sum_{j=\max(0, k-n)}^{\min(k, n)} a_j b_{k-j} x^k = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j} x^k + \sum_{k=n+1}^{2n} \sum_{j=k-n}^n a_j b_{k-j} x^k$. Noemen we nu $c_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j}$, dan is c_k de coëfficiënt van x^k in het product van partiële sommen van de twee machtreeksen, althans als $n \geq k$. We noemen nu de reeks $\sum c_n$ de productreeks van de reeksen $\sum a_n$ en $\sum b_n$. Als $\sum a_n$ en $\sum b_n$ convergeren, hoeft de productreeks niet te convergeren. Hiervan geven we een voorbeeld. Neem $a_0 = b_0 = a_1 = b_1 = 0$, $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\log n}$ voor $n \geq 2$, dan zijn $\sum a_n$ en $\sum b_n$ convergent (Leibniz). $c_n = \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j} = \sum_{j=2}^{n-2} a_j b_{n-j} = \sum_{j=2}^{n-2} \frac{(-1)^j}{\log j} \frac{(-1)^{n-j}}{\log(n-j)} = (-1)^n \sum_{j=2}^{n-2} \frac{1}{\log j \log(n-j)}$.

Opgave 120. Bewijs, dat voor j en n natuurlijk, $2 \leq j \leq n-2$, geldt $(\log \frac{1}{2}n)^2 \geq \log j \log(n-j)$.

Omdat $\log j \log(n-j) \leq \log^2 \frac{1}{2}n$ is $|c_n| \geq \frac{n-3}{\log^2 \frac{1}{2}n}$ en dit $\rightarrow +\infty$ als $n \rightarrow \infty$. Dus kan $\sum c_n$ niet convergent zijn, want als $\sum a_n$ convergent was, zou $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ gelden.

(30.1) Als de productreeks van twee reeksen convergent is, is de som van de productreeks het product van de sommen van de twee reeksen.

Om deze stelling te bewijzen, bewijzen we eerst de volgende hulpstelling:

(30.2) Als de rij a_n convergeert en $b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$ (de rij der rekenkundige gemiddelden), dan convergeert de rij b_n en $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Bewijs: We beschouwen eerst het geval dat $\lim a_n = 0$. Bij $\varepsilon > 0$ is dan een N_1 te vinden zodat voor $n > N_1$ geldt $|a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Verder is er een N_2 te vinden zodat voor $n > N_2$ geldt $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^N |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$. Voor $n > \max(N_1, N_2)$

geldt dan $|b_n| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k| = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^M |a_k| + \frac{1}{n} \sum_{k=M+1}^n |a_k| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \frac{n-M}{n} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

Dus $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. Als $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, dan is $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a) = 0$ en $b_n = a_n - a + a = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_n - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a + a = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (a_n - a) + a$ en dit $\rightarrow a$ voor $n \rightarrow \infty$.

Bewijs van (30.1): Laat de gegeven reeksen $\sum a_n$ en $\sum b_n$ zijn met partiële sommen A_n en B_n en sommen A en B . Voor de productreeks geldt

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{k=0}^n c_k = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j} = \sum_{j=0}^n \sum_{k=j}^n a_j b_{k-j} = \sum_{j=0}^n a_j \sum_{k=j}^n b_{k-j} = \sum_{j=0}^n a_j B_{n-j} \\ &= \sum_{j=0}^n a_{n-j} B_j. \text{ Verder is } \sum_{n=0}^N C_n = \sum_{n=0}^N \sum_{j=0}^n a_{n-j} B_j = \sum_{j=0}^N \sum_{n=j}^N a_{n-j} B_j = \sum_{j=0}^N B_j \sum_{n=0}^{N-j} a_n = \\ &= \sum_{j=0}^N B_j A_{N-j} = A \sum_{j=0}^N B_j + \sum_{j=0}^N B_j (A_{N-j} - A). \end{aligned}$$

Omdat de rij B_n convergent is, is deze rij begrensd: $|B_n| < K$. Dus $\left| \sum_{n=0}^N C_n - A \sum_{j=0}^N B_j \right| = \left| \sum_{j=0}^N B_j (A_{N-j} - A) \right| \leq K \sum_{j=0}^N |A_j - A|$. Omdat $\lim_{j \rightarrow \infty} |A_j - A| = 0$, is volgens (30.2) ook

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N |A_j - A| = 0, \text{ dus } \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N C_n - A \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N B_j \right) = 0. \text{ Volgens (30.2) is } \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N B_j = B, \text{ dus } \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N C_n = AB. \text{ Als } \lim_{N \rightarrow \infty} C_N \text{ bestaat,}$$

dan is deze volgens (30.2) ook gelijk aan AB , waarmee (30.1) bewezen is.
(30.3) Als twee reeksen absoluut convergent zijn, dan is hun productreeks ook absoluut convergent.

Bewijs: Laat de reeksen $\sum a_n$ en $\sum b_n$ zijn en $A_n^* = \sum_{k=0}^n |a_k|$ en $B_n^* = \sum_{k=0}^n |b_k|$ dan is als boven $A_n^* B_n^* = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} |a_j| |b_{k-j}| \geq \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k |a_j| |b_{k-j}|$. Laat $\sum c_n$ de productreeks van $\sum a_n$ en $\sum b_n$ zijn en $\sum c_n^*$ die van $\sum |a_n|$ en $\sum |b_n|$ dan is $|c_n| = \left| \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right| \leq \sum_{k=0}^n |a_k| |b_{n-k}| = c_n^*$ en $\sum_{k=0}^n c_k^* \leq A_n^* B_n^*$ en dit is begrensd omdat A_n^* en B_n^* beide convergeren. Dus $\sum c_n^*$ is convergent en een majorant van $\sum |c_n|$, dus $\sum c_n$ is absoluut convergent.

Opgave 121. Bewijs nogmaals dat $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$, ditmaal met behulp van de stellingen over het product van twee reeksen.

§ 31. Dubbelrijen en dubbelreeksen.

Een dubbelrij is een afbeelding van de verzameling van de paren (m, n) natuurlijke getallen in een of andere verzameling V . We kunnen het element dat aan het paar (m, n) wordt toegevoegd, aangeven met a_{mn} .

Een dubbelrij a_{mn} elementen van een metrische ruimte heet convergent met limiet a (in formule: $\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} a_{mn} = a$), als bij ieder reëel getal $\epsilon > 0$

een natuurlijk getal N te vinden is, zodat voor $m > N$, $n > N$ geldt

$$\rho(a, a_{mn}) < \epsilon.$$

We kunnen nu ook één index (b.v. de eerste) vasthouden; dan vormt a_{mn} bij vaste m als functie van n een gewone rij, die ook een limiet kan hebben: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{mn} = b_m$. Deze limieten b_m vormen als functie van m weer een rij, die ook een limiet kan hebben: $\lim_{m \rightarrow \infty} b_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{mn}$

We noemen een b_m een rijenlimiet. Evenzo $c_n = \lim_{m \rightarrow \infty} a_{mn}$ een kolommenlimiet en $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{mn}$. Al de genoemde limieten kunnen natuurlijk alleen gevormd worden als ze bestaan. De namen rijenlimiet en kolommenlimiet zijn ontleend aan de schrijfwijze van de dubbelrij in een rechthoekig schema als volgt:

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & \rightarrow & b_1 \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & \rightarrow & b_2 \\
 a_{31} & . & . & \dots & & . \\
 . & & & & & . \\
 . & & & & & . \\
 \downarrow & \downarrow & & & & \\
 c_1 & c_2 & . & & &
 \end{array}$$

Er zijn drie limieten die we met elkaar vergelijken, n.l. $\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{mn}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} a_{mn}$. We zeggen wel dat de laatste twee uit elkaar ontstaan door verwisseling van de limietovergangen. Ze behoeven niet tegelijkertijd te bestaan, of als ze bestaan aan elkaar gelijk te zijn. Hiervan enige voorbeelden: Neem $a_{mn} = (-1)^n \frac{1}{m}$ voor $n > m$ en $a_{mn} = (-1)^m \frac{1}{n}$ voor $n \leq m$ (hoe ziet het rechthoekig schema er dan uit?). Dan is $\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{mn} = 0$. De rijen- en kolommenlimieten bestaan geen van alle. Tweede voorbeeld: neem $a_{mn} = 1$ voor $n > m$ en $a_{mn} = 0$ voor $n \leq m$ (hoe ziet het rechthoekig schema er dan uit?). Dan bestaat $\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{mn}$ niet, $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{mn} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{mn} = 1$, dus $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} a_{mn} = 0 \neq 1 = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{mn}$. Aan dit voorbeeld zien we dus dat verwisseling van limietovergangen niet altijd geoorloofd is, zelfs niet als beide bestaan.

(31.1) Als van een dubbelrij a_{mn} de dubbellimiet bestaat ($\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{mn} = a$) benevens alle rijenlimieten ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_{mn} = b_m$), dan convergeren de rijenlimieten naar de dubbellimiet ($\lim_{m \rightarrow \infty} b_m = a$).

Bewijs: Bij $\varepsilon > 0$ is een N_1 te vinden zodat voor $m > N_1$, $n > N_1$ geldt $\rho(a, a_{mn}) < \frac{\varepsilon}{2}$, verder bij m een N_2 zodat voor $n > N_2$ geldt $\rho(b_m, a_{mn}) < \frac{\varepsilon}{2}$ (N_2 hangt van m af!). Bij een $m > N_1$ nemen we $n = \max(N_1, N_2) + 1$, dan is $\rho(a, b_m) \leq \rho(a, a_{mn}) + \rho(a_{mn}, b_m) < \varepsilon$. Dus $\lim_{m \rightarrow \infty} b_m = a$.

Het spreekt vanzelf dat er een met (31.1) overeenkomstige stelling ook voor kolommenlimieten geldt.

Uit (31.1) volgt nu onmiddellijk:

(31.2) Als $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{mn}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{mn}$ en $\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{mn}$ bestaan dan bestaan $\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{mn}$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} a_{mn}$ en geldt $\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{mn} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} a_{mn} = \lim_{m \rightarrow \infty} a_{mn}$.

Opgave 122. Bereken $\lim_{n \rightarrow \infty} n (e^{\frac{1}{n}} - 1)$.

We gaan uit van een dubbelrij a_{mn} en willen $\sum a_{mn}$ vormen. We weten echter dat het resultaat in het algemeen zal afhangen van de volgorde waarin we de termen nemen. Als echter $\sum |a_{mn}|$ in een of andere volgorde genomen convergeert, is de limiet in $\sum a_{mn}$ onafhankelijk van de volgorde der termen; we noemen die limiet dan de dubbelsom $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ van de absoluut convergente dubbelreeks $\sum a_{mn}$. We kunnen daarnaast ook proberen te vormen $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}$ en $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}$ (herhaalde reeksen). Deze vormen geen verschikkingen van de dubbelreeks.

(13.3) Als a_{mn} reëel en ≥ 0 , bestaan $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$, $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}$ en $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}$ alle drie en zijn aan elkaar gelijk of ze bestaan geen van drieën.

Bewijs: Vorm de verzameling van alle eindige sommen van elementen a_{mn} . Deze verzameling reële getallen ≥ 0 is begrensd of niet.

1^o De verzameling is begrensd met bovenste grens = A. Dan is in een of andere volgorde genomen $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} = A$, want iedere partiële som is $\leq A$; verder is bij iedere $\epsilon > 0$ een som van a_{mn} die $> A - \epsilon$ is, dus een partiële som die al die termen bevat is ook $> A - \epsilon$. Verder is $\sum_{k=1}^{\infty} a_{mk} \leq A$, dus $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}$ bestaat en is $\leq A$; $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{jn} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{jn} \leq A$. Dus $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}$ bestaat en is $\leq A$. Maar $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{jk} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{jk}$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^n a_{jk} = A$, dus $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = A$. Evenzo bewijst men $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = A$.

2^o De verzameling is onbegrensd. Bij iedere $B > 0$ is een som van termen a_{mn} te vinden $> B$. Iedere partiële som die die termen bevat is ook $> B$ dus de dubbelreeks is divergent. Nu bewijzen we dat $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}$ niet bestaat. Als voor een of andere m $\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}$ niet bestaat zijn we al klaar. Als ze wel alle bestaan is toch voor voldoende grote m en n $\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{jk} \geq \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m a_{jk} > B$, dus $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}$ bestaat niet. Evenzo bewijst men, dat $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}$ niet bestaat.

(31.4) Als een dubbelreeks $\sum a_{mn}$ absoluut convergeert, dan hebben $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}$ en $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}$ en zijn beide gelijk aan $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$.

Bewijs: Uit (31.3) volgt dat $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}|$ bestaat. Uit het bestaan van $\sum_{m=1}^{\infty} |a_{mn}|$ volgt het bestaan van $\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}$, verder is $|\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}|$. Uit dit laatste en uit het bestaan van $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}|$ volgt het bestaan van $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}$. Evenzo bewijst men het bestaan van $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}$. Noem $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = A$. Bij $\epsilon > 0$ is dan een M te vinden zodat voor $m > M$ geldt $|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} - A| = |\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} - A| < \frac{\epsilon}{2}$. Verder is er een N te vinden (deze kan van M afhangen) zodat voor $n > N$ geldt $|\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{n+1} a_{jk} -$

- $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{M+1} a_{jk} < \frac{\epsilon}{2}$. Dus $\left| \sum_{k=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{M+1} a_{jk} - A \right| < \epsilon$. Kies nu een antitone nulrij ϵ_p (b.v. $\epsilon_p = \frac{1}{p}$) Dan zijn daarbij stijgende rijen M_p en N_p te vinden zodat $\left| \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{j=1}^{M_p} a_{jk} - A \right| < \epsilon_p$. Neem nu in $\sum a_{mn}$ de termen in een dusdanige volgorde dat $\sum_{k=1}^{N_p} \sum_{j=1}^{M_p} a_{jk}$ onder de partiële sommen voorkomen, dan volgt daaruit dat $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} = A$.

§ 32. Nog enkele convergentiecriteria voor reeksen.

(32.1) (Convergentie criterium van Kummer) Laat a_n en b_n reëel en > 0 zijn en verder $\sum b_n$ divergent. Als $\liminf \left(\frac{1}{b_n} \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) > 0$ is $\sum a_n$ convergent; als $\limsup \left(\frac{1}{b_n} \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) < 0$ dan is er een $\alpha > 0$ en een N zodat voor $n > N$ geldt $\frac{1}{b_n} \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} > \alpha$. Dus $a_{n+1} < \frac{1}{\alpha} \left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \right)$ dus $\sum_{k=N+1}^n a_k < \frac{1}{\alpha} \left(\frac{a_{N+1}}{b_{N+1}} - \frac{a_n}{b_n} \right) < \frac{1}{\alpha} \frac{a_{N+1}}{b_{N+1}}$ en hieruit volgt dat $\sum_{k=1}^n a_k$ begrensd en dus convergent is.

Als $\liminf \left(\frac{1}{b_n} \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) < 0$, dan is er een N te vinden zodat voor $n > N$ geldt $\frac{1}{b_n} \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} < 0$, dus $a_{n+1} > \frac{a_n}{b_n} b_{n+1}$, dus $a_n \geq \frac{a_{N+1}}{b_{N+1}} b_n$. Daar $\sum b_n$ divergent is moet $\sum a_n$ het ook zijn.

Door hierin $b_n = 1$ te substitueren vindt men het criterium van d'Alembert terug. Door substitutie van $b_n = \frac{1}{n}$ vindt men:

(32.2) (Convergentie criterium van Raabe) Laat a_n reëel en > 0 en $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \frac{\sigma}{n} \right) = 0$ zijn. Als $\sigma > 1$ is $\sum a_n$ convergent, als

$\sigma < 1$ divergent.

(32.3) (Convergentie criterium van Gauss) Laat a_n reëel en > 0 , zijn en $\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \frac{\sigma}{n} \right) n^{1+\delta}$ begrensd voor een $\delta > 0$. Als $\sigma > 1$ is $\sum a_n$ convergent als $\sigma \leq 1$ is $\sum a_n$ divergent.

Voor het bewijs van (32.3) hebben we de volgende hulpstelling nodig:
(32.4) $\sum \frac{1}{n \log n}$ is divergent.

$$\text{Bewijs } \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log k} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=[e^j]+1}^{[e^{j+1}]} \frac{1}{k \log k} \geq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)e^{j+1}} (e^{j+1} - e^j - 1) =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{e}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j+1} - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)e^{j+1}} = \infty \text{ en dit } \rightarrow \infty, \text{ als } n \rightarrow \infty, \text{ want } \sum \frac{1}{ne^n} \text{ is convergent, omdat } \frac{ne^n}{(n+1)e^{n+1}} \rightarrow \frac{1}{e} < 1.$$

Bewijs van (32.4): Voor $\sigma \neq 1$ volgt (32.3) onmiddellijk uit (32.2). We behoeven dus alleen het geval $\sigma = 1$ te beschouwen. Omdat $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n^\delta} = 0$ is $\sum a_n$ divergent.

Bewijs: Stel eerst $\liminf \left(\frac{1}{b_n} \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) > 0$,

$= 0$, is $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \frac{1}{n} \right) n \log n = 0$. Nu is $\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \frac{1}{n} \right) n \log n =$
 $= n \log n \frac{a_n}{a_{n+1}} \frac{\log \frac{(n+1)}{n}}{\frac{(n+1)}{n} \log \left(1 + \frac{1}{n} \right)}$. Verder is $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} + 1 \right) \log (1+x) =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} (1+x) \frac{\log (1+x)}{x} = 1$ dus $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1$. Dus
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \log n \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) \log (n+1) \right) = -1$ en hieruit volgt door toepas-
sing van (32.1) met $b_n = \frac{1}{n \log n}$ dat $\sum a_n$ divergent is.

De in deze paragraaf behandelde convergentiecriteria zijn bijzonder
bruikbaar als er een functie $f(x)$ bestaat die voor $x = 0$ zekere diffe-
rentieerbaarheidseigenschappen bezit, zodat $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{a_n}{a_{n+1}}$. Laat eerst
 $f(x)$ continu in 0 zijn. Dan is $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = f(0)$ en het criterium van

d'Alembert leert ons dat $\sum a_n$ convergent of divergent is naar gelang
 $f(0) > 1$ of $f(0) < 1$ (steeds is $a_n > 0$ verondersteld). We behoeven dus
alleen nog $f(0) = 1$ te beschouwen. Veronderstellen we nu dat $f(x)$ diffe-
rentieerbaar is in 0, dan is $f(x) = 1 + x f'(0) + x \varepsilon$ ($x \rightarrow 0$) en het
criterium van Raabe leert ons dat $\sum a_n$ convergent of divergent is
naar gelang $f'(0) > 1$ of $f'(0) < 1$ is. Als $f'(0) = 1$ kunnen we met
het criterium van Gauss tot divergentie besluiten als b.v. $g(x)$ op een
interval gedefinieerd en differentieerbaar en in 0 tweemaal differen-
tieerbaar is. Immers dan is $f(x) = 1 + x + x^2 f''(0) + x^2 \varepsilon$ ($x \rightarrow 0$) en
het criterium van Gauss (met $\delta \leq 1$) geeft de divergentie van $\sum a_n$.

Als voorbeeld behandelen we de vraag van welke reële α de reeks

$\sum n^\alpha$ convergent is. Substitueer in $\frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha}$ nu $n = \frac{1}{x}$ dan komt er $f(x) =$
 $= \left(\frac{1}{\frac{1}{x} + 1} \right)^\alpha = (1+x)^{-\alpha}$. Nu is $f(0) = 1$ en $f'(0) = -\alpha$; verder is $f(x)$

tweemaal differentieerbaar dus $\sum n^\alpha$ is convergent als $-\alpha > 1$, dus
 $\alpha < -1$ en divergent als $-\alpha \leq 1$, dus $\alpha \geq -1$.

We merken verder nog op dat de behandelde criteria voor reeksen
 $\sum a_n$ met $a_n > 0$ ook nog kunnen worden toegepast op reeksen met wille-
keurige termen $\neq 0$ om absolute convergentie aan te tonen. Als het cri-
terium echter divergentie oplevert kan in dat geval alleen nog maar
geconcludeerd worden dat de reeks niet absoluut convergeert, maar nog
niet dat hij divergeert.

Opgave 123. Onderzoek de reeks $\sum n^\alpha$ ook voor complexe α .

Opgave 124. Onderzoek de convergentie van de binomiaalreeks $\sum \binom{\mu}{n} x^n$
voor $x = -1$. Let voor μ reëel ook op het teken van de termen!

Opgave 125. Onderzoek voor welke reële waarden van α de reeksen
 $\sum \frac{1}{(\log n)^\alpha}$ en $\sum \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right)^\alpha$ convergeren.

Opgave 126. Onderzoek de convergentie van $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^\alpha + n^\alpha}$ voor reële
waarden van α .

§ 33. Een stelling van Abel.

(33.1) Als $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergeert, dan is $\lim_{x \uparrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Bewijs: Noem $\sum_{k=0}^n a_k = A_n$ en $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = A$, dan geeft partiële sommatie:
 $\sum_{k=0}^n a_k x^k = \sum_{k=0}^{n-1} A_k (x^k - x^{k+1}) + A_n x^n = (1-x) \sum_{k=0}^{n-1} A_k x^k + A_n x^n$. Omdat $\sum a_n$ convergent is, heeft $\sum a_n x^n$ een convergentiestraal ≥ 1 en is $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ zeker gedefinieerd voor $0 \leq x < 1$. Omdat A_n begrensd is, is $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n x^n = 0$ voor $0 \leq x < 1$, dus $f(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$ en $f(x) - A = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n - A(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} (A_n - A) x^n$. Bij $\varepsilon > 0$ is een N , zodat voor $n > N$ geldt $|A_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Dan is $|f(x) - A| \leq (1-x) \sum_{k=0}^N |A_k - A| + (1-x) \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2} x^k \leq (1-x) \sum_{k=0}^N |A_k - A| + \frac{\varepsilon}{2}$. Voor $1 > x > \max(0, 1 - \frac{\varepsilon}{2 \sum_{k=0}^N |A_k - A| + 1})$ is dan $|f(x) - A| < \varepsilon$. Dus $\lim_{x \uparrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Iets nieuws halen we uit (33.1) alleen als de convergentiestraal R van $\sum a_n x^n$ gelijk aan 1 is. (Als nl. $R > 1$, dan volgt (33.1) direct uit de continuïteit van een door een machtreeks voorgestelde functie.) We kunnen dan uit (33.1) halen, dat als een machtreeks ergens op zijn convergentiecirkel convergeert, de limiet in dat punt continu aansluit bij de waarden binnen de convergentiecirkel van de door de machtreeks voorgestelde functie bij radiale nadering tot dat punt op de convergentiecirkel (d.w.z. bij nadering langs de rechte die het middelpunt van de convergentiecirkel met het punt i.q. verbindt). In (33.1) staat deze bewering voor het punt 1. Voor een willekeurig punt ζ volgt het er echter ook direct uit; immers als $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$ convergeert, dan geeft (33.1), dat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n = \lim_{\lambda \uparrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n \lambda^n = \lim_{\lambda \uparrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\lambda \zeta)^n$ en $\lambda \zeta$ voor $0 \leq \lambda \leq 1$ is juist het lijnstuk tussen 0 en ζ .

Met de stelling van Abel kunnen we b.v. opnieuw bewijzen dat $\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

We merken nog op, dat het omgekeerde van de stelling van Abel niet geldt. Zo is $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ voor $|x| < 1$. Verder is $\lim_{x \uparrow 1} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}$, maar $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ is divergent.

EINDE VAN HET EERSTE JAAR.